

液压水锤引起的受限空泡无量纲参数构造 与相似分析*

纪杨子焱¹, 周兰伟², 李庆聪², 郝瑞², 李向东²

(1. 南京工程学院机械工程学院, 江苏 南京 211167;

2. 南京理工大学机械工程学院, 江苏 南京 210094)

摘要: 高速破片侵入充液容器会引发液压水锤效应, 并在液体内形成反复膨胀与收缩的空泡。容器约束显著影响空泡演化规律, 但现有研究多采用有量纲参数描述, 难以区分容器尺寸变化与约束条件变化各自的影响。针对这一问题, 基于柱形空泡截面模型开展量纲分析, 以容器初始内半径、流体密度和系统等效体积模量为重复变量, 将破片动能输入、初始压差、容器弹性约束及壁面惯性效应归纳为一组无量纲参数。通过破片撞击三种尺寸充液容器的试验, 提取了特定截面空泡的最大半径和对应的到达时刻, 并分析了无量纲参数对空泡峰值特征的影响规律。结果表明: 无量纲最大半径随无量纲动能输入近似线性增大, 而初始压差比对其起抑制作用, 物理机制在于初始压差相对于附加压力项的作用随其增大而增强。无量纲到达时刻的数据离散度显著高于最大半径, 其原因是到达时刻不仅受动能输入和初始压差影响, 还与空泡径向速度的衰减历程密切相关。与非受限参考结果的对比进一步表明, 受限条件下到达时刻的缩短幅度大于最大半径的降低幅度, 使得平均膨胀速率反而高于非受限情形。构建的无量纲参数组能够有效描述不同容器尺寸和约束条件下的空泡峰值特征, 可为液压水锤效应分析与充液结构毁伤评估提供科学依据。

关键词: 液压水锤效应; 受限空泡; 量纲分析; 破片侵入; 充液容器

中图分类号: O389

国标学科代码: 13035

文献标识码: A

Construction of Dimensionless Parameters and Similarity Analysis for Confined Cavities Induced by Hydrodynamic Ram

Ji Yangziyi¹, ZHOU Lanwei², LI Qingcong², HAO Rui², LI Xiangdong²

(1. School of Mechanical Engineering, Nanjing Institute of Technology, Nanjing 211167, Jiangsu, China;

2. School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China)

Abstract: High-velocity fragment penetration into a liquid-filled container induces hydrodynamic ram (HRAM) and produces an elongated cavity that expands and contracts within the liquid. Container confinement strongly affects cavity evolution, whereas dimensional variables alone cannot clearly distinguish the effect of container size from that of the confinement condition. A dimensionless framework was therefore developed to characterize the peak features of confined cavities in containers of different sizes. A cylindrical-cavity cross-sectional model was adopted, and the fragment kinetic-energy loss per unit penetration length was used to represent the initial energy input. Liquid compression and elastic container expansion were treated as two volume springs connected in series, and a system equivalent bulk modulus was introduced to describe their combined resistance to cavity expansion. The initial inner radius of the container, liquid density, and system equivalent bulk modulus were selected as repeating variables. The fragment energy input, initial pressure difference, elastic volume partitioning, wall inertia, and initial geometric scale were then organized into a dimensionless parameter group. Fragment-impact experiments were conducted using three

收稿日期: 2026-05-21; 修回日期: 2026-07-13

基金项目: 江苏省自然科学基金 (BK20241446); 南京工程学院校级科研基金 (YKJ202404)

第一作者: 纪杨子焱 (1994—), 男, 博士, 讲师. E-mail: jyzy525@hotmail.com;

通信作者: 周兰伟 (1988—), 男, 博士, 副教授. E-mail: lwzhou@njjust.edu.cn.

structurally similar water-filled containers of different sizes. Cavity contours were extracted from high-speed images, and a pixel-slice method was used to obtain the radius history, maximum radius, and time to maximum radius at selected valid cross-sections in the central region of each container. The square cross-sections were converted into equal-area circular cross-sections. The container equivalent bulk modulus was identified by matching the calculated and measured radius histories, and the system equivalent bulk modulus was then determined from the liquid and container moduli. The experimental confined-cavity results were also compared with reference values obtained from an unconfined cylindrical-cavity model. The results show that the dimensionless maximum radius increases approximately linearly with the dimensionless kinetic-energy input. A larger initial pressure-difference ratio produces a smaller dimensionless maximum radius under a comparable energy input because the relative contribution of the initial pressure difference to the total pressure difference increases. The sensitivity of the maximum radius to energy input, represented by the slopes of the grouped linear fits, decreases rapidly at first and then approaches a relatively stable level as the initial pressure-difference ratio increases. In contrast, the dimensionless time to maximum radius exhibits substantially greater dispersion and does not form a stable monotonic relation with energy input. Its variation depends not only on the maximum radius but also on the radial-velocity decay history, including the effects of pressure evolution, wall inertia, and geometric scale. Comparison with the unconfined reference shows that confinement reduces both the maximum radius and the time to maximum radius, but the relative reduction in time is greater. Consequently, the dimensionless average expansion rate is higher under confined conditions, and the difference becomes more pronounced as the container size decreases. The proposed dimensionless framework provides a consistent basis for comparing peak cavity characteristics under different container sizes and confinement conditions and supports similarity analysis of hydrodynamic ram and damage assessment of liquid-filled structures.

Keywords: hydrodynamic ram; confined cavity; dimensional analysis; fragment penetration; fluid-filled container

当高速破片撞击并侵入充液容器时,破片将动能传递给液体,并在液体中激发压力脉冲,这种现象被称为液压水锤效应(Hydrodynamic Ram, HRAM)^[1-3]。对于军用飞机而言,其携带的燃油箱在遭受高速破片撞击时,可能因液压水锤效应而产生大变形、撕裂甚至解体^[4,5],进而导致飞机毁伤。因此,液压水锤效应是军用飞机等目标易损性及毁伤评估分析中重点关注的问题之一^[6-8]。

如图1所示,破片侵入充液容器后形成空泡,其沿侵入方向拉长,并发生径向膨胀和收缩^[9]。在容器约束下,空泡演化通常经历两个阶段^[10]:第一阶段为惯性膨胀与收缩阶段,该阶段空泡边界清晰,径向运动占主导;第二阶段为周期振荡阶段,空泡边界趋于弥散,动力学特征更接近球形气泡。由于第二阶段边界难以清晰辨识和定量分析,现有研究多集中于第一阶段。

试验和数值研究表明,容器约束会抑制空泡增长、加速空泡收缩^[11-14],这使得相较于无约束情形,空泡最大半径减小^[15],膨胀速率降低,闭合时刻提前^[12-14]。Deletombe等^[15]对比了枪弹撞击复合材料容器与近似无限水域的试验,发现无约束条件下空泡体积约为受限情形的6倍,膨胀-收缩持续时间约为4倍。Guo等^[13,16]发现,空泡最大半径和壁面膨胀速度均随容器直径增大而增大,但增大的趋势逐渐减缓。类似地,在物体入水空泡问题中也观察到了约束效应: Mansoor等^[17]指出几何约束会显著改变疏水球体入水空泡的夹断深度和时刻; Watson等^[18]和Lv等^[19]进一步表明,壁面接近程度可显著影响空泡形态、最大尺寸及演化时间,并通过改变局部压力梯度场导致空泡膨胀与收缩不对称; He等^[20]利用Eulerian数值模拟,证实结构尺寸、流体体积和撞击速度共同影响空泡演化,表现为自由液面形态、物体速度衰减和加速度历程的明显差异。

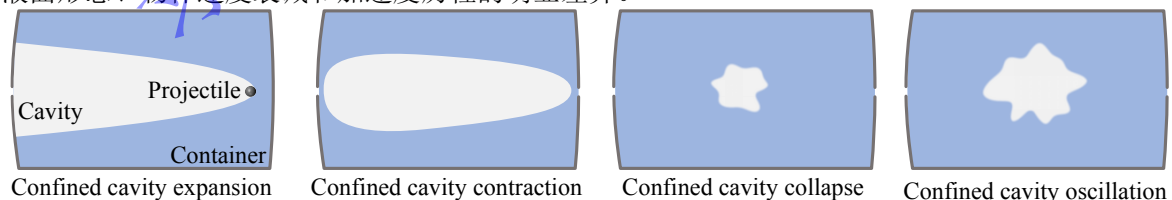


图1 液压水锤效应引起的受限空泡演化示意图

Fig.1 Illustration of confined cavity evolution caused by hydrodynamic ram.

目前描述第一阶段受限空泡演化的理论模型主要有两类。第一类基于独立膨胀思想,将空泡沿侵入方向划分为仅作径向运动的独立截面单元。单元的初始动能由破片穿过该截面时的动能衰减确定,容器约束的影响则通过等效压差和扰动范围两个参数表征。早期模型^[21]针对非受限情形,将等效压

差和扰动范围取为常数，两者均通过拟合试验数据确定。Guo 等^[12-14]进一步引入破片能量损失与流体载荷及弹性壁面变形的经验关系，将模型扩展到受限情形。Ji 等^[10,22,23]在此基础上将扰动范围与容器尺寸关联并随空泡增长演化，并在后续分析中证明该模型在适当极限下可退化为经典非受限模型。第二类以 Rayleigh–Plesset 方程为基础^[24-26]，通过引入体积约束和壁面修正项计算受限空泡的体积振荡。这类模型将空泡尺寸变化简化为单一半径的变化，难以描述空泡的轴向尺寸变化。但对于侵彻体动能在液体中于短距离内迅速耗散并形成近似球形空泡的情形，如枪弹入液后迅速翻滚^[26]或破片入液后迅速破碎^[24]，该类方法仍有较好适用性。

综上，已有不少研究关注破片速度、容器尺寸和约束强弱对空泡演化的影响，但多采用无量纲参数描述，难以区分容器尺寸变化与约束条件变化各自的影响。为此，本文将量纲分析引入截面模型，以容器初始内半径、流体密度和系统等效体积模量为重复变量，将破片动能输入、初始压差和壁面惯性效应组织为一组无量纲参数。随后，开展了破片撞击三种尺寸充水容器的试验，利用试验数据分析了无量纲参数与空泡最大半径、到达最大半径时刻之间的关系，并与非受限模型的计算结果进行对比，讨论了容器约束对空泡最大半径及其到达时刻的影响规律。

1 受限柱形空泡截面模型与无量纲参数构造

1.1 物理模型与基本假设

考虑高速球形破片沿轴向侵彻充液容器，弹道轨迹上产生轴对称空泡。如图 2 所示，为建立截面动力学模型，基于柱形空泡近似，将该空泡沿轴向划分为若干垂直于弹道的局部截面；在每一局部截面附近，取单位轴向长度的空泡段，并近似为受限流体中的柱形空泡单元。本文选取轴向某位置处的柱形空泡单元为研究对象，记其截面半径为 $R(t)$ 。引入如下假设：

1. 空泡与容器同轴，膨胀和收缩过程中所选截面内的空泡边界与容器内边界均按圆形处理；不同轴向位置的柱形空泡单元仅作径向运动，轴向耦合忽略。
2. 容器仅发生弹性变形；流体在容器内壁处的径向速度等于壁面的径向变形速度。
3. 流体视为弱可压缩，忽略波传播效应；瞬时密度空间均匀，仅随时间改变。
4. 流体的径向惯性按不可压缩势流评估，其动压力远小于体积弹性模量，不影响密度分布。
5. 忽略流体黏性、热传导及表面张力等耗散效应。
6. 破片通过界面的动能损失全部转化为截面内流体与容器壁的径向动能。

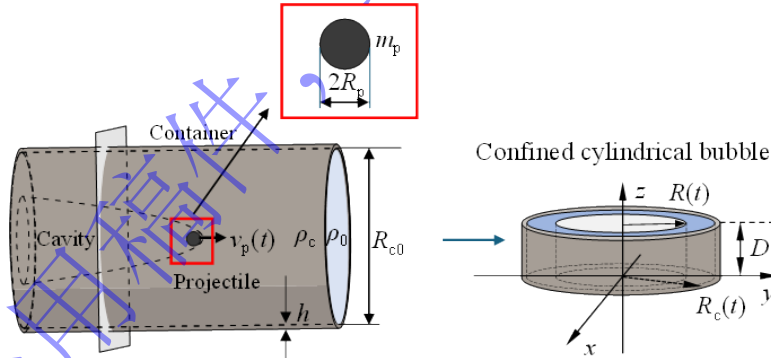


图 2 受限柱形空泡示意图

Fig.2 Illustration of confined cylindrical bubble.

基于上述假设，控制固定截面处受限空泡演化的物理变量可归纳为四类：一是破片质量 m_p 、半径 R_p 、瞬时速度 v_p 及阻力系数 C_d ；二是容器初始内半径 R_{c0} 、壁厚 h 、材料密度 ρ_c 及描述容器弹性响应的系数；三是流体初始密度 ρ_0 及描述流体可压缩性的系数；四是空泡内外初始压差。

本文主要关注空泡峰值量，即空泡最大半径 R_{max} 及对应时刻 t_{max} ，并将其作为后续量纲分析的目标变量。为建立相应的无量纲关系，下面分别确定破片穿过截面时的初始动能输入，以及空泡膨胀引起的压差–体积约束关系。

1.2 破片动能衰减与截面初始动能输入

破片动能为

$$E_p = \frac{1}{2} m_p v_p^2 \quad (1)$$

破片沿轴向运动时，单位轴向长度上的动能衰减可写为

$$-\frac{dE_p}{dz} = -m_p v_p \frac{dv_p}{dz} \quad (2)$$

根据能量守恒，单位轴向长度上的动能损失等于流体阻力所做的功，即

$$-\frac{dE_p}{dz} = F_D \quad (3)$$

其中 F_D 为流体阻力，可写为

$$F_D = \frac{1}{2} \rho_0 C_d A_p v_p^2 \quad (4)$$

式中 A_p 为破片迎风面积。对于半径为 R_p 的球形破片，有 $A_p = \pi R_p^2$ 。因此，破片穿过该截面时，单位轴向长度上的动能输入量级满足

$$-\frac{dE_p}{dz} = F_D \sim \rho_0 C_d R_p^2 v_p^2 \quad (5)$$

上式表明，单位轴向长度上的初始动能输入由 C_d 、 R_p 和 v_p 共同决定。 m_p 主要影响其沿轴向的减速过程，决定了破片到达给定截面时的 v_p 。在单截面量纲分析中， v_p 被视为该截面的给定条件，因此破片相关变量可由该截面处的 C_d 、 R_p 和 v_p 集中表征。若将该模型用于预测破片的速度衰减过程， m_p 的作用便会通过 v_p 的变化而体现。

1.3 空泡内外压差分解与系统等效体积模量

空泡的径向运动由外部液体压力相对于空泡内部压力的差值决定。记 P_{in} 为空泡内部压力， P 为外部液体压力， P_0 为充液静止状态下的初始环境压力。如图 3 所示，外部压力相对于空泡内部压力的总压差可分解为两部分：一是初始环境压力与空泡内部压力之间的初始压差，二是空泡膨胀挤压流体并引起容器扩张后形成的附加压力。

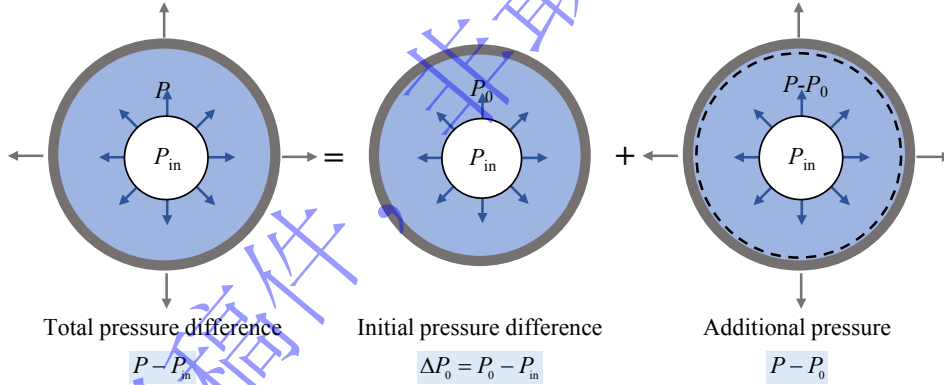


图 3 空泡内外总压差分解示意图

Fig.3 Schematic decomposition of the external-to-internal pressure difference of the bubble.

首先，定义初始压差为

$$\Delta P_0 = P_0 - P_{in} > 0 \quad (6)$$

并将其视为该截面运动过程中的有效常数。

其次，在空泡膨胀过程中，流体压缩和容器扩张使外部液体压力由初始值 P_0 变化为 P ，因此由空泡膨胀及体积约束引起的附加压力为 $P - P_0$ ，外部压力相对于空泡内部压力的总压差可写为

$$P - P_{in} = \Delta P_0 + (P - P_0) \quad (7)$$

为定量表示附加压力 $P - P_0$ ，需建立截面内的径向体积约束关系。

基于假设 (2) 至 (4)，忽略轴向质量输运后，空泡膨胀产生的体积增量只能由截面内液体压缩与容器扩张共同承担。考虑单位轴向长度的截面，记 $V_0 = \pi R_{c0}^2$ 为初始充液静止状态下截面内的液体体积， V_l 为瞬时液体体积， V_c 为瞬时容器内部体积。结合假设 (3) 与 (4)，容器壁仅发生弹性变形，流体满足弱可压缩假定，在线性近似下，流体与容器中的压力变化可分别表示为

$$P - P_0 = -K_l \frac{V_l - V_0}{V_0} = K_c \frac{V_c - V_0}{V_0} \quad (8)$$

式中, K_l 为液体体积模量, K_c 为容器等效体积模量, 用以集中表征容器几何尺寸、壁厚、材料弹性等因素对整体受压扩张抗力的影响。

记瞬时空泡体积为 V_b , 由纯径向几何约束有

$$V_l = V_c - V_b \quad (9)$$

由液体与容器界面处的压力平衡条件可得

$$P_0 - K_l \frac{(V_c - V_b) - V_0}{V_0} = P_0 + K_c \frac{V_c - V_0}{V_0} \quad (10)$$

整理得

$$K_l V_b = (K_l + K_c)(V_c - V_0) \quad (11)$$

引入无量纲参数 $\kappa = K_l / (K_l + K_c)$, 可将容器体积增量表示为空泡体积的函数:

$$V_c = V_0 + \kappa V_b \quad (12)$$

式中, κ 表征空泡膨胀所引起的体积增量中由容器扩张承担的比例。当 $\kappa \rightarrow 0$ 时, 容器趋于刚体, 总体积变化主要由流体压缩承担; 当 $\kappa \rightarrow 1$ 时, 空泡膨胀产生的体积增量主要由容器扩张承担。

代入单位轴向长度下的 $V_b = \pi R^2$ 与 $V_c = \pi R_c^2$, 可得空泡与容器内壁之间的运动学约束关系

$$R_c^2 = R_{c0}^2 + \kappa R^2 \quad (13)$$

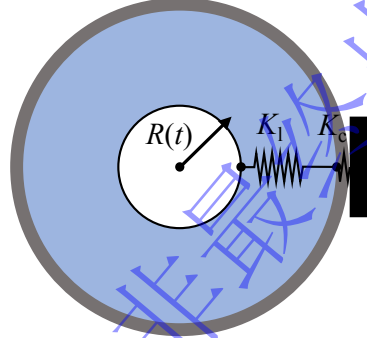


图4 流体压缩与容器扩张的串联弹簧类比

Fig.4 Analogy Between Liquid and Container Moduli and Series-Connected Springs.

如图4所示, 将流体压缩与容器受压膨胀视为两个串联的体积弹簧, 则截面内抵抗体积扩张的总抗力可用系统等效体积模量 K 表示:

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{K_l} + \frac{1}{K_c} \quad (14)$$

进一步, 由式(8)及(12)可得

$$P - P_0 = K_c \kappa \frac{V_b}{V_0} = K \frac{V_b}{V_0} \quad (15)$$

由于单位轴向长度下 $V_b / V_0 = R^2 / R_{c0}^2$, 因此

$$P - P_0 = K \frac{R^2}{R_{c0}^2} \quad (16)$$

将式(16)代回式(7), 得

$$P - P_{in} = \Delta P_0 + K \frac{R^2}{R_{c0}^2} \quad (17)$$

至此, 由体积约束引起的附加压力可由系统等效体积模量 K 显式表达。在后续无量纲参数构造中, 进入总压差表达式的压力参数可归结为 ΔP_0 与 K 。

1.4 Buckingham II 定理与基础无量纲参数构造

按 Buckingham II 定理, 参与量纲分析的有量纲物理量包括: 空泡峰值量 $\{R_{\max}, t_{\max}\}$, 破片的几何与运动变量 $\{R_p, v_p\}$, 容器的初始几何变量 $\{R_{c0}, h\}$, 系统的密度与等效体积模量 $\{\rho_0, \rho_c, K\}$, 以及初始压差 $\{\Delta P_0\}$ 。此外, 前文提及的 κ 与 C_d 本身为无量纲参数, 不参与 Π 项个数的计数, 但仍将作为控制参量保留在后续的量纲关系中。因此, 参与量纲分析的有量纲变量可写为

$$\{R_{\max}, t_{\max}, R_{c0}, R_p, h, \rho_0, \rho_c, K, \Delta P_0, v_p\} \quad (18)$$

上述有量纲变量共 10 个，基本量纲仅包含 $\{M, L, T\}$ 三类。根据 Buckingham Π 定理，可构造的独立无量纲组数为 $n_{\Pi} = 10 - 3 = 7$ 。选取 $\{R_{c0}, \rho_0, K\}$ 作为重复变量。其基本量纲分别为

$$[R_{c0}] = L, \quad [\rho_0] = ML^{-3}, \quad [K] = ML^{-1}T^{-2} \quad (19)$$

三者在 $\{M, L, T\}$ 量纲空间中线性无关，故可构成一组独立的重复变量。

首先，定义无量纲空泡最大半径和到达时刻

$$\beta_{\max} = \frac{R_{\max}}{R_{c0}} \quad (20)$$

$$\tau_{\max} = \frac{t_{\max}}{t_0} \quad (21)$$

其中由量纲平衡得到的时间尺度为

$$t_0 = R_{c0} \sqrt{\frac{\rho_0}{K}} \quad (22)$$

因此有

$$\tau_{\max} = \frac{t_{\max}}{R_{c0} \sqrt{\rho_0 / K}} \quad (23)$$

对于其余有量纲变量，相应的基础无量纲参数为

$$\beta_0 = \frac{R_p}{R_{c0}}, \quad \eta = \frac{h}{R_{c0}}, \quad \delta = \frac{\rho_c}{\rho_0}, \quad \Theta = \frac{\Delta P_0}{K}, \quad v^* = v_p \sqrt{\frac{\rho_0}{K}} \quad (24)$$

其中， β_0 表征破片与容器的初始半径比， η 与 δ 分别表征容器的无量纲壁厚及容器壁与流体的密度比， Θ 表征初始压差相对于 K 的无量纲比值， v^* 表征破片速度相对于速度尺度 $v_0 = \sqrt{K / \rho_0}$ 的无量纲比值。

由此可知，空泡最大半径与到达时刻的基础无量纲关系可写为

$$\beta_{\max} = \tilde{F}_1(\kappa, C_d, \beta_0, \eta, \delta, \Theta, v^*), \quad \tau_{\max} = \tilde{F}_2(\kappa, C_d, \beta_0, \eta, \delta, \Theta, v^*) \quad (25)$$

1.5 无量纲参数重组与相似关系

上述基础无量纲参数分别来自初始几何、材料属性、破片运动和初始压差等因素，物理指向较为分散。为便于后续分析，下面将其重新组织为具有明确物理含义的组合参数。其中， Θ 已直接表示初始压差与等效体积模量之间的比值，故保持原形式不变。

1.5.1 壁面惯性效应参数

壁面惯性效应指空泡膨胀带动容器壁运动时，容器壁质量对系统径向动力学的贡献。其强弱不仅取决于壁面质量，还取决于壁面随空泡运动的程度，因此可用壁面动能 T_c 与流体动能 T_l 之比衡量。该比值越高，说明壁面运动引入的惯性效应越显著。

动能由质量与速度共同决定， T_c/T_l 可分解为容器与液体质量比与速度平方比的乘积：

$$\frac{T_c}{T_l} \sim \frac{M_c}{M_l} \cdot \frac{\dot{R}_c^2}{\dot{R}^2} \quad (26)$$

式中： M_c 和 M_l 分别为容器和液体质量，二者比值反映壁厚和材料密度对壁面等效质量的影响； $\dot{R}_c$ 和 $\dot{R}$ 分别为容器壁和空泡的运动速度。

首先确定质量比：单位轴向长度上，容器壁的质量近似为

$$M_c \sim \rho_c \pi [(R_{c0} + h)^2 - R_{c0}^2] = \rho_c \pi (h^2 + 2hR_{c0}) \quad (27)$$

相应范围内流体质量取为

$$M_l \sim \rho_0 \pi R_{c0}^2 \quad (28)$$

二者之比定义为

$$\mu \equiv \frac{M_c}{M_l} = \delta(\eta^2 + 2\eta) \quad (29)$$

由该式可知， μ 为由材料密度比和初始几何尺寸决定的常数。由于壁面惯性项中的质量贡献由 M_c/M_l 给出，壁厚比 η 和材料密度比 δ 在该项中以组合 $\delta(\eta^2 + 2\eta)$ 的形式出现，因此可用 μ 表征容器

壁相对于流体的等效质量贡献。

$\dot{R}_c$ 并非独立变量，而是通过体积约束关系与 $\dot{R}$ 耦合。将式(13)对时间求导，得

$$\frac{\dot{R}_c^2}{\dot{R}^2} = \kappa^2 \frac{R^2}{R_c^2} \quad (30)$$

将式(29)和(30)代入式(26)可得

$$\frac{T_c}{T_l} \sim \mu \kappa^2 \left(\frac{R}{R_c} \right)^2 \quad (31)$$

结合 $\beta = R / R_{c0}$ 及式(13)可得，

$$\left(\frac{R}{R_c} \right)^2 = \frac{\beta^2}{1 + \kappa \beta^2} \quad (32)$$

得

$$\frac{T_c}{T_l} \sim \mu \kappa^2 \frac{\beta^2}{1 + \kappa \beta^2} \quad (33)$$

因此，壁面惯性效应的无量纲贡献由 μ 与 κ 共同确定。

1.5.2 无量纲动能参数

为将式(5)无量纲化，利用重复变量 $\{R_{c0}, \rho_0, K\}$ 构造对应的单位长度能量尺度。由时间尺度 t_0 和速度尺度 v_0 ，进而单位长度上的质量尺度和能量尺度分别为

$$m_0 \sim \rho_0 R_{c0}^2, \quad m_0 v_0^2 \sim K R_{c0}^2 \quad (34)$$

将初始动能输入与上述能量尺度比较，定义无量纲动能参数

$$\Pi_E = \frac{\rho_0 C_d R_p^2 v_p^2}{K R_{c0}^2} = C_d \beta_0^2 v^*{}^2 \quad (35)$$

该参数表征破片向截面输入的初始动能相对于流体-容器系统抗变形能力的大小。

1.5.3 核心参数组与相似关系

综合前述分析，初始压差由 Θ 表征；破片初始动能输入由 Π_E 表征；容器壁惯性由壁-流质量比 $\mu = \delta(\eta^2 + 2\eta)$ 与体积分配系数 κ 共同表征；初始几何尺度则由 β_0 表征。因此，控制空泡峰值量的核心无量纲参数组可写为 $(\kappa, \Theta, \mu, \beta_0, \Pi_E)$ 。据此，空泡最大半径及对应时刻的无量纲关系可表示为：

$$\beta_{\max} = F_1(\kappa, \Theta, \mu, \beta_0, \Pi_E), \quad \tau_{\max} = F_2(\kappa, \Theta, \mu, \beta_0, \Pi_E)$$

此外，定义平均膨胀速率 $\bar{u}_R = R_{\max} / t_{\max}$ ，则其无量纲形式为

$$\bar{u}_\beta = \frac{\beta_{\max}}{\tau_{\max}} = \bar{u}_R \sqrt{\frac{\rho_0}{K}} \quad (36)$$

1.6 非受限空泡的无量纲分析

作为对照，下面考虑非受限空泡。用 1.1 节的柱形空泡近似、固定截面径向运动以及破片动能输入的处理思路，但不再计入容器壁约束，因此 1.3 节的相关关系此处不再适用。

在经典非受限柱形空泡模型中，通常假设液体不可压，并引入有限外边界半径 Ω ，如图 5 所示。其中， Ω 并不对应实际存在的物理边界，而是人为规定的、受空泡运动影响的液体范围。其原因在于，若直接将液体域视为无限大，则柱形空泡纯径向流动对应的动能积分会出现对数发散^[22]，因此必须取有限的 Ω 。

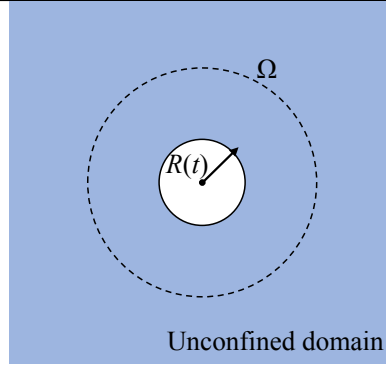


图5 非受限域内的柱形空泡

Fig.5 Cylindrical bubble in unconfined domain.

仍选取 $R_{\max}$ 及 $t_{\max}$ 作为分析对象，相关的有量纲物理量可写为

$$\{R_{\max}, t_{\max}, R_p, \Omega, \rho_0, \Delta P_0, v_p\} \quad (37)$$

选取 $\{R_p, \rho_0, \Delta P_0\}$ 为重复变量，可定义无量纲最大半径与无量纲到达时刻

$$\beta_{u,\max} = \frac{R_{\max}}{R_p}, \quad \tau_{u,\max} = \frac{t_{\max}}{R_p \sqrt{\rho_0 / \Delta P_0}} \quad (38)$$

对应的非受限平均膨胀速率的无量纲形式为

$$\bar{u}_{u,\beta} = \frac{\beta_{u,\max}}{\tau_{u,\max}} = \bar{u}_{u,R} \sqrt{\frac{\rho_0}{\Delta P_0}} \quad (39)$$

其余无量纲参数为

$$\chi = \frac{\Omega}{R_p}, \quad \Pi_{E,u} = \frac{\rho_0 C_d v_p^2}{\Delta P_0} \quad (40)$$

其中， $\Pi_{E,u}$ 表征初始动能输入相对于初始压差的大小， χ 表征有限外边界半径与破片半径的比值。由此可知，非受限情形下峰值量的一般无量纲关系可写为

$$\beta_{u,\max} = F_u(\Pi_{E,u}, \chi), \quad \tau_{u,\max} = G_u(\Pi_{E,u}, \chi) \quad (41)$$

为检验上述无量纲构造是否与非受限模型一致，考虑非受限空泡方程^[22,27]

$$R\dot{R} = \sqrt{\frac{1}{\rho_0 \ln(\Omega/R)} \left(\frac{1}{2} \rho_0 C_d R_p^2 v_p^2 - \Delta P_0 R^2 \right)} \quad (42)$$

引入

$$\beta_u = \frac{R}{R_p}, \quad \tau_u = \frac{t}{R_p \sqrt{\rho_0 / \Delta P_0}} \quad (43)$$

并代入前述无量纲参数，可得

$$\beta_u \frac{d\beta_u}{d\tau_u} = \sqrt{\frac{\Pi_{E,u} / 2 - \beta_u^2}{\ln(\chi / \beta_u)}} \quad (44)$$

在达到最大半径时，有 $d\beta_u / d\tau_u = 0$ 。由于物理上始终满足 $\chi > \beta_u$ ，故 $\ln(\chi / \beta_u)$ 为有限正值，因此峰值条件只能由分子为零决定，即

$$\frac{\Pi_{E,u}}{2} - \beta_u^2 = 0 \quad (45)$$

由此可得

$$\beta_{u,\max} = \sqrt{\frac{\Pi_{E,u}}{2}} \quad (46)$$

该结果表明，在非受限模型中，最大半径由初始动能与初始压差的平衡决定，与 Ω 无关，一般关系式 $F_u(\Pi_{E,u}, \chi)$ 中的 χ 不起作用。而 $\tau_{u,\max}$ 的表达式中仍保留 χ ：

$$\tau_{u,\max} = \int_0^{\beta_{u,\max}} \frac{\beta_u \sqrt{\ln(\chi / \beta_u)}}{\sqrt{\Pi_{E,u} / 2 - \beta_u^2}} d\beta_u \quad (47)$$

式中, $\beta_{u,\max}$ 决定积分上限, χ 保留在被积函数的对数项中, 其取值会影响积分结果。为分离 $\beta_{u,\max}$ 与 χ 的作用, 采用 $\beta_{u,\max}$ 对 β_u 进行归一化。令

$$q = \frac{\Omega}{R_{u,\max}} = \frac{\chi}{\beta_{u,\max}} \quad (48)$$

$$s = \frac{\beta_u}{\beta_{u,\max}} \quad (49)$$

其中, q 为相对于非受限最大半径的无量纲外边界尺度。将式(48)和(49)代入式(47)可得

$$\tau_{u,\max} = \beta_{u,\max} I(q) \quad (50)$$

其中, $I(q)$ 为有限外边界尺度对应的修正函数, 定义为

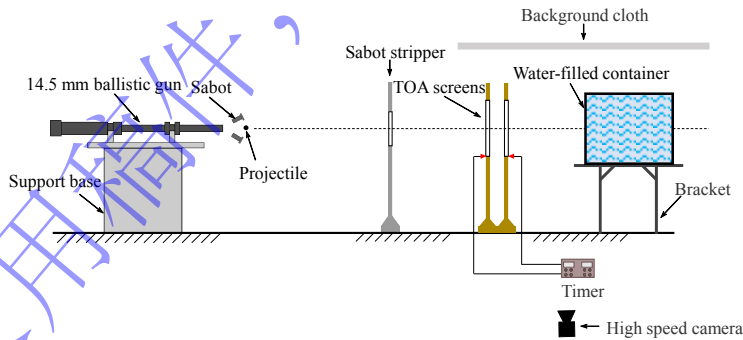
$$I(q) = \int_0^1 \frac{s \sqrt{\ln(q/s)}}{\sqrt{1-s^2}} ds \quad (51)$$

以上无量纲关系基于非受限模型自身尺度, 受限分析引入了容器初始内半径 R_{c0} 和系统等效体积模量 K , 两者不在同一基准上, 直接比较时需将非受限结果换算到受限尺度, 具体换算关系见 3.4 节。

2 破片侵彻充液容器试验

2.1 试验布置

为检验构建的无量纲参数组, 并分析容器尺寸对空泡峰值量的影响, 开展了球形破片撞击充水容器试验。图 6 给出了试验整体布置, 由弹道枪、挡托装置、测速靶、计时仪、高速摄像机、背景布和容器等组成。破片为 $\Phi 9.5$ mm 钨球, 质量 8 g, 通过调节发射药装药量控制破片撞击速度 v_i 在 600 m/s~1300 m/s 之间。为减小入射位置偏差对空泡形态的影响, 试验中破片瞄准点均位于容器中心区域, 使空泡主要沿容器轴向发展, 并尽量保持各工况之间初始几何条件一致。挡托装置为中间开孔的厚钢板, 用于拦截分离的弹托碎片。测速靶测量破片的撞击速度, 高速摄像机记录全过程, 并辅助测量破片的撞击速度与剩余速度。容器后方布置白色背景布, 以提高空泡轮廓的清晰度。



(a) Schematic



(b) Photograph

图 6 试验布置

Fig.6 Test layout

试验使用三种材料相同、结构相似、尺寸不同的容器，图 7 给出了容器结构示意图。容器主体为矩形钢框架，配合橡胶密封垫、前后靶板压框及厚 15mm 的聚碳酸酯透明面板。虽然圆柱形容器更接近模型中的假设，但曲面透明壁面会引入光学折射，增加轮廓识别和尺寸标定的不确定性。因此，试验采用平面透明窗容器，以保证空泡边界的记录质量和图像处理精度。靶板采用 4mm 厚的 2A12-T4 铝合金，面内尺寸与容器框开口一致。容器顶部设有螺纹注水口，用于充水、排气及试验前密封。

三种尺寸容器内部长 (L) $\times$ 宽 (W) $\times$ 高 (H) 分别为 500 mm $\times$ 300 mm $\times$ 300 mm (小)、600 mm $\times$ 400 mm $\times$ 400 mm (中) 和 720 mm $\times$ 500 mm $\times$ 500 mm (大)，对应内部容积约 45 L、96 L 和 180 L。小、中容器的钢框架厚度为 10 mm，大容器为 8 mm，试验中未观察到容器框架发生明显塑性变形。

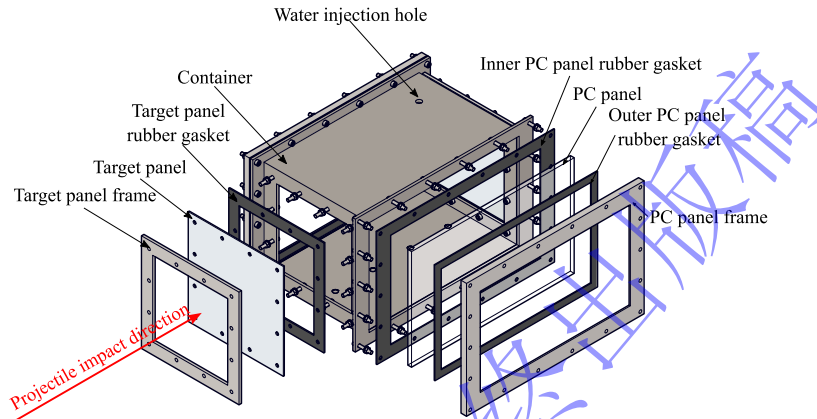


图 7 容器结构示意图

Fig.7 Schematic diagram of the container structure

针对每种尺寸容器开展 5~6 发试验，共计 17 发，详细工况见表 1。

表 1 试验工况

容器尺寸	试验发数	$v_i/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
小	6	627、826、984、1012、1129、1226
中	6	609、737、866、996、1117、1251
大	5	729、940、1078、1138、1271

2.2 空泡轮廓提取与峰值量获取方法

对高速摄影记录的空泡图像进行二值化处理，结合灰度筛选与 Canny 边缘检测方法提取空泡轮廓，如图 8 所示。利用高速摄影的标定结果，将图像坐标换算为实际尺寸，同时获得破片位移。

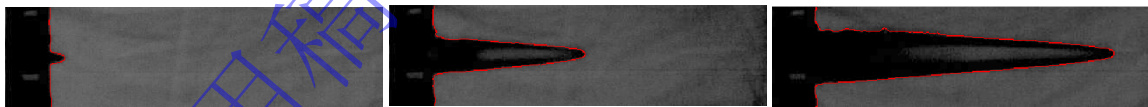


图 8 空泡轮廓提取效果图

Fig.8 Cavity contour extraction results

采用“像素切片”法获取特定截面处空泡半径随时间的演化。如图 9(a)所示，逐帧提取该截面位置的单列像素；将各帧的像素列按统一灰度阈值和空间标定处理后，依次拼接为一张新图像（图 9(b)）。该图像的水平方向对应帧序，垂直方向对应该列的空间位置，空泡边界沿水平方向的变化反映该截面半径随时间的演化。提取该图像中的上、下边界，并结合高速摄影帧率将帧序换算为时间；随后取上、下边界到弹道轴线距离的平均值作为该截面的空泡半径，最终得到该截面空泡半径随时间的变化历程（图 9(c)），由此读取 $R_{\max}$ 和 $t_{\max}$ 。

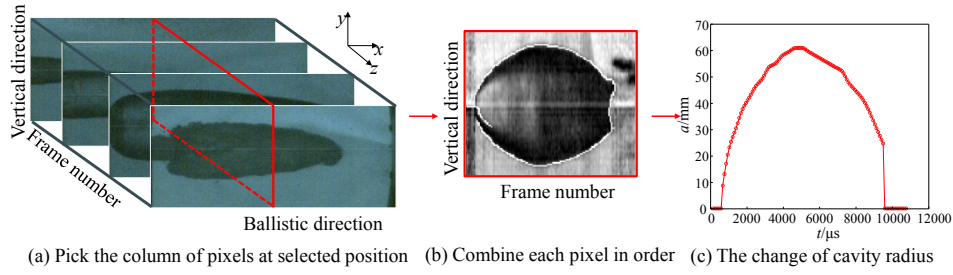


图9 像素切片法示意图
Fig.9 Illustration of the pixel-slice method

2.3 无量纲化所需参数的确定

已有研究表明^[10], 受限空泡在不同轴向位置的半径历程变化规律存在差异。靠近容器前、后壁面的截面更容易受到端部效应影响, 局部半径历程中会叠加轴向运动影响, 膨胀与收缩阶段的对称性较弱; 相比之下, 容器中部截面的边界演化较为连续, 半径历程较完整, 径向膨胀过程也更接近本文截面模型的基本假设。基于上述特点, 本文选取容器中部区域内边界较清晰、半径历程较完整, 且在成像平面内关于弹道轴线基本上下对称的截面作为有效截面, 提取对应的 $R_{\max}$ 和 $t_{\max}$ 。

计算 $\beta_{\max}$ 、 $\tau_{\max}$ 、 Π_E 和 Θ 需要确定 R_{c0} 、 v_p 、 C_d 、 ΔP_0 以及 K_c , 下面分别说明相应的方法。

试验所用容器横截面为方形。方形截面下, 壁面到空泡的距离随方向变化, 局部约束并非各向均匀, 空泡轮廓可能呈现一定的方向性差异。本文以截面平均半径历程为基础, 分析最大半径、到达最大半径时刻及其无量纲形式; 相应地, 模型中的外边界半径应反映截面整体的体积尺度。据此, 按面积相等关系 $\pi R_{c0}^2 = WH$ 将方形截面折算为等面积圆截面, 并以 $R_{c0} = \sqrt{WH/\pi}$ 作为等效初始内半径。这样处理保留了单位轴向长度上的初始液体体积, 与模型中 V_0 的定义一致, 后续无量纲化均采用该等效半径。

v_p 和 C_d 由高速摄影提取的破片位移-时间数据通过式(4)拟合得到, 具体步骤见文献^[22], 典型拟合结果与试验结果对比如图10所示。 ΔP_0 的取值基于以下考虑: 空泡膨胀期间, P_{in} 降至水的饱和蒸汽压力量级^[28] (数 kPa), 而破片穿孔使容器与大气连通, P_0 可近似取为常压; 静水压力相对常压贡献很小, 且 P_{in} 远小于 P_0 , 因此所有工况统一取 $\Delta P_0 = 0.1$ MPa。

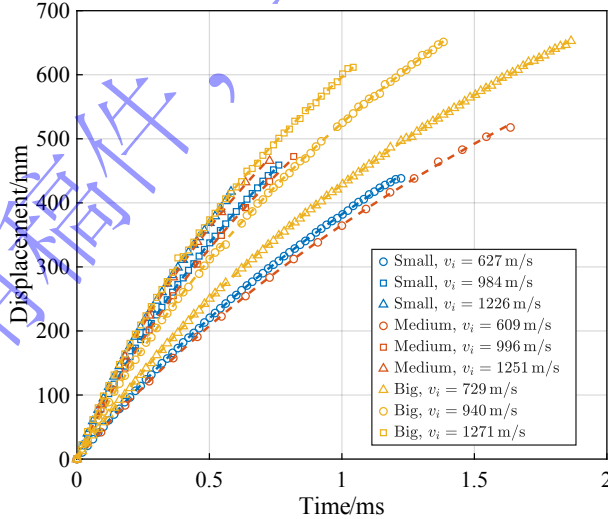


图10 试验和拟合得到的破片位移-时间数据

Fig.10 Representative projectile displacement histories and quadratic-drag fits

在确定 R_{c0} 、 v_p 、 C_d 、 ΔP_0 及流体参数后, 以式(8)中的 K_c 作为待识别参数。对于给定的 K_c , 代入受限柱形空泡模型^[23]计算对应的半径历程 $R_{\text{mod}}(t; K_c)$, 并与试验得到的半径历程 $R_{\text{exp}}(t)$ 进行比较。以最大半径、到达最大半径时刻及主要膨胀阶段半径历程的综合偏差作为识别依据, 综合偏差定义为

$$J(K_c) = w_R \left(\frac{R_{\max, \text{mod}} - R_{\max, \text{exp}}}{R_{\max, \text{exp}}} \right)^2 + w_t \left(\frac{t_{\max, \text{mod}} - t_{\max, \text{exp}}}{t_{\max, \text{exp}}} \right)^2 + w_c \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{R_{\text{mod}}(t_i) - R_{\text{exp}}(t_i)}{R_{\max, \text{exp}}} \right)^2 \quad (52)$$

其中, w_R 、 w_t 和 w_c 为权重系数, N 为参与比较的时间点数, 下标 mod、exp 和 cal 分别表示模型计算

值、试验值和标定值。计算时先在给定范围内对 K_c 进行对数空间搜索，再在 $J(K_c)$ 较小的区间内局部细化；并以半径历程拟合优度、最大半径偏差和到达最大半径时刻偏差作为判断指标。最终取 $J(K_c)$ 最小时对应的 K_c 作为当前截面的标定结果，记为 $K_{c,cal}$ 。因此， $K_{c,cal}$ 表示式(8)中 K_c 在当前试验截面下的具体取值，用于表征实际容器在该截面下对空泡体积膨胀的等效约束水平。

定义最大半径相对偏差和到达最大半径时刻相对偏差为

$$e_{R_{max}} = \frac{R_{max,mod} - R_{max,exp}}{R_{max,exp}} \times 100\% \quad (53)$$

$$e_{t_{max}} = \frac{t_{max,mod} - t_{max,exp}}{t_{max,exp}} \times 100\% \quad (54)$$

图 11 给出了采用 $K_{c,cal}$ 后模型计算结果与典型试验结果的对比。可以看到，三种容器中计算曲线均能描述空泡半径的增长过程，最大半径和到达最大半径时刻与试验结果较为接近。后续无量纲化中的 K 由前文给出的液体压缩与容器扩张组合关系计算，即 $K = K_l K_{c,cal} / (K_l + K_{c,cal})$ 。

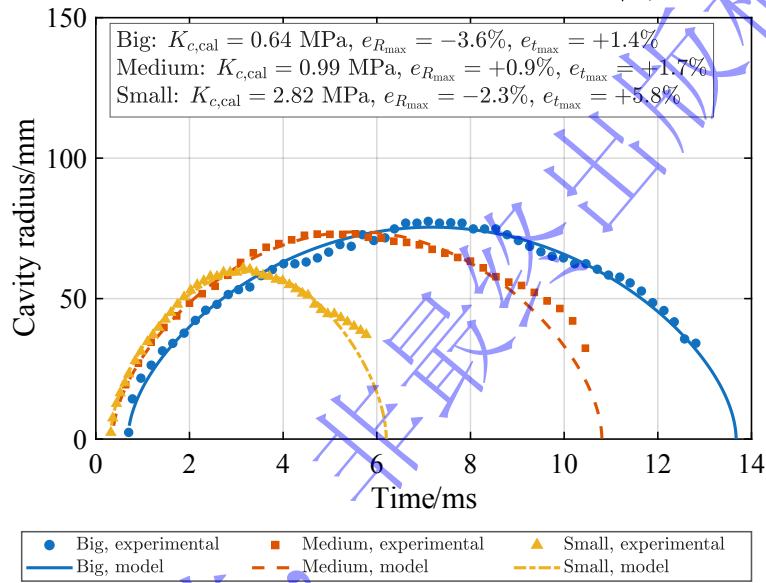


图 11 典型工况下半径历程计算结果与试验结果对比

Fig.11 Comparison between calculated and experimental radius histories under typical cases

3 结果与讨论

3.1 空泡特征量随 v_p 的变化规律

本节主要分析中部有效截面处有量纲空泡特征量随 v_p 的变化。图 12(a)给出了 R_{max} 与 v_p 的试验数据及线性拟合结果，其中 r^2 为决定系数。 R_{max} 随 v_p 增大近似线性递增。容器尺寸越大，相同 v_p 下的 R_{max} 和拟合直线斜率均越大。在相同 v_p 下， R_{max} 仍存在一定离散，且离散度随容器尺寸减小而增大：大、中容器的数据点更贴合拟合直线 ($r^2 \geq 0.956$)，小容器则较为分散 ($r^2 = 0.828$)。

图 12(b)给出了 t_{max} 与 v_p 的试验结果。与 R_{max} 不同， t_{max} 随 v_p 的变化更为散乱。小容器的 t_{max} 集中在 2.2~3.5ms，随 v_p 增大无明显趋势；中、大容器的 t_{max} 虽略有增大，但相关性仍较弱。同一容器内的数据点离散较大，但不同容器之间分层清晰：相近 v_p 下，容器越大， t_{max} 整体越大。相比于 v_p ，容器尺寸对 t_{max} 的影响更为显著。

图 12(c)给出了 $\bar{u}_R$ 随 v_p 的变化。 $\bar{u}_R$ 整体随 v_p 增大而升高，容器之间同样存在差异：小容器的 $\bar{u}_R$ 整体偏高，中、大容器则相互重叠较多。小容器中最大半径虽然较小，但到达最大半径的时间缩短更明显，使得二者之比反而高于中、大容器。

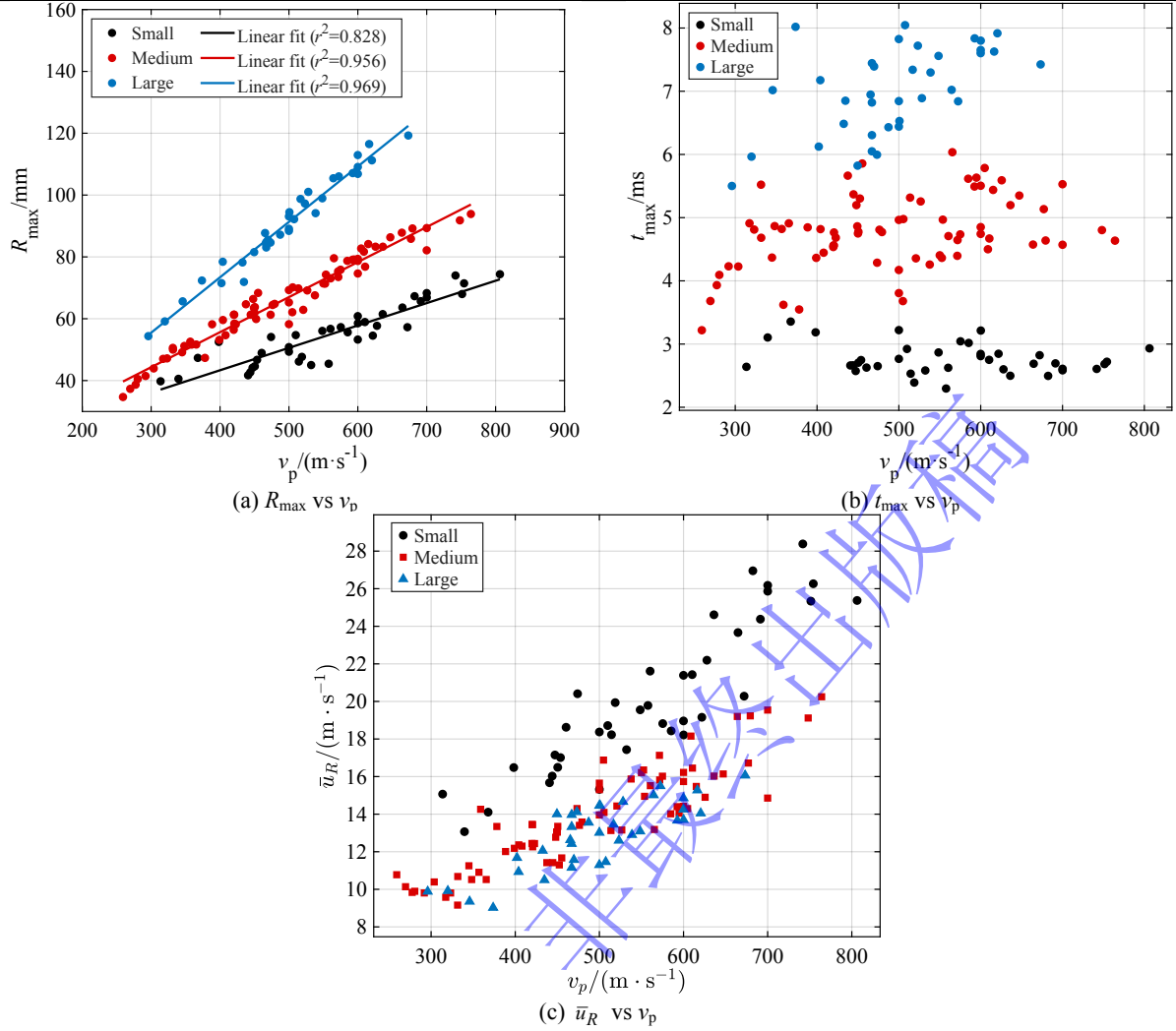


图 12 空泡峰值量随截面速度的变化

Fig.12 Variation of cavity peak quantities with sectional instantaneous velocity

3.2 $\beta_{\max}$ 与 Π_E 及 Θ 的关系

上节结果表明，仅以 v_p 作为比较变量时，不同容器下空泡特征量的变化仍存在差异，难以直接反映动能输入和约束条件的共同作用。本节进一步分析 $\beta_{\max}$ 与 Π_E 、 Θ 之间的关系。由量纲分析结果可知， $\beta_{\max}$ 取决于 κ 、 Θ 、 Π_E 、 μ 和 β_0 。对于同一容器和破片， β_0 固定， κ 与 μ 变化较小，因此 $\beta_{\max}$ 的变化主要与 Π_E 和 Θ 有关。由于 Θ 在试验中连续分布，为分析相近 Θ 下 $\beta_{\max}$ 与 Π_E 的关系，将每种容器的 Θ 等分为 5 个区间，逐区间对 $\beta_{\max}$ - Π_E 进行线性拟合，结果见图 13，图中均方根误差（root mean square error, RMSE）用于衡量拟合结果与试验数据之间的偏差。各 Θ 区间内， $\beta_{\max}$ 随 Π_E 增大近似线性递增，多数区间 $r^2 \geq 0.9$ ， $\text{RMSE} \leq 0.021$ 。

不同容器的数据分布随容器尺寸变化而改变，这首先体现在 K 值不同，进而导致 Θ 的取值范围不同。小容器的 K 较大， Θ 整体偏低（0.0145~0.0715），在此范围内 Θ 的变化对 $\beta_{\max}$ 影响不明显，5 条拟合线基本重合。由此也可看出，图 12(a) 中小容器 $R_{\max}$ - v_p 的离散并非仅由 v_p 引起，还与不同截面处的等效约束水平有关。 Π_E 同时反映无量纲动能输入和系统等效抗变形能力，采用 Π_E 归纳数据后， $\beta_{\max}$ 的离散程度明显降低。随着容器尺寸增大， K 减小， Θ 的取值范围拓宽。中、大容器的拟合线随 Θ 增大出现分层：在相近 Π_E 下， Θ 越大， $\beta_{\max}$ 越小。

爆炸与冲击 Explosion and Shock Waves

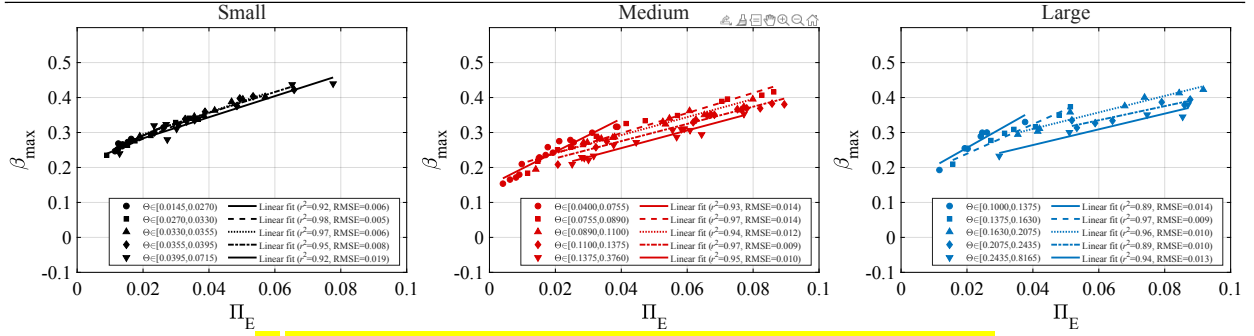


图 13 不同初始压差比区间内无量纲最大半径与无量纲动能输入的关系
Fig.13 Relationship between dimensionless maximum radius and dimensionless kinetic-energy input at different initial pressure-difference ratios

为进一步比较三种容器中 $\beta_{\max}$ 随 Π_E 的整体分布范围，图 14 将图 13 中各 Θ 区间的分组拟合结果整理为分组拟合线包络带。对于同一容器，包络带的上下边界分别由不同 Θ 区间拟合线在各 Π_E 位置处的最小和最大 $\beta_{\max}$ 确定。各拟合线仅在对应数据组的 Π_E 范围内参与计算。如图所示，小容器的包络带较窄且整体偏上，中、大容器的包络带下移且大部分重叠，与前述分区拟合结果一致：在相同 Π_E 下，小容器的 $\beta_{\max}$ 较大，中、大容器的 $\beta_{\max}$ 整体较小。中、大容器虽然对应的无量纲参数并不完全相同，但在当前试验范围内，由此引起的 $\beta_{\max}$ 差别有限，因此两者包络带大部分重合。

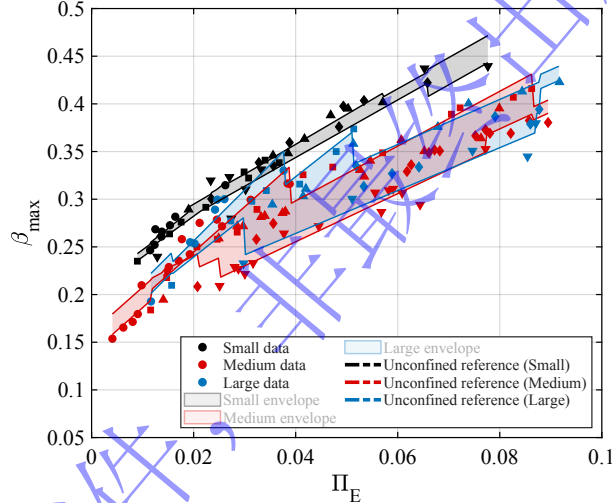


图 14 无量纲最大半径与无量纲动能输入关系的拟合包络
Fig.14 Fitted envelopes for the relationship between dimensionless maximum radius and dimensionless kinetic-energy input

采用与图 13 相同的处理方法，

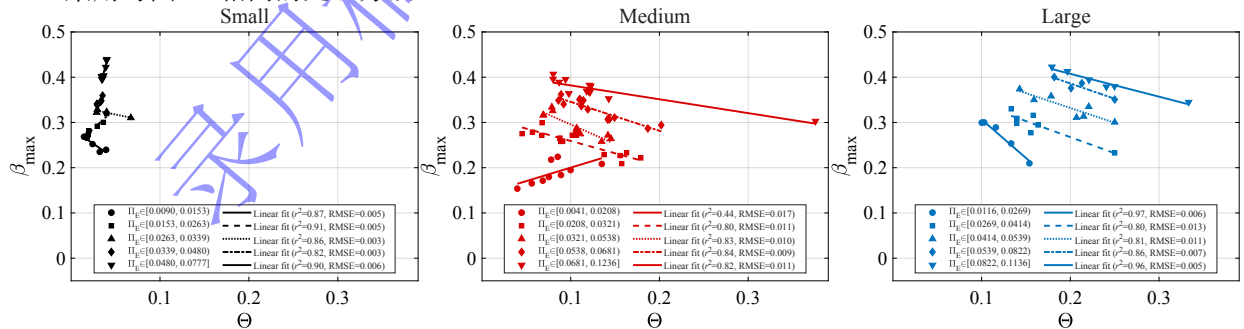


图 15 给出了不同 Π_E 区间内 $\beta_{\max}$ 与 Θ 的关系。与图 13 相比，

爆炸与冲击 Explosion and Shock Waves

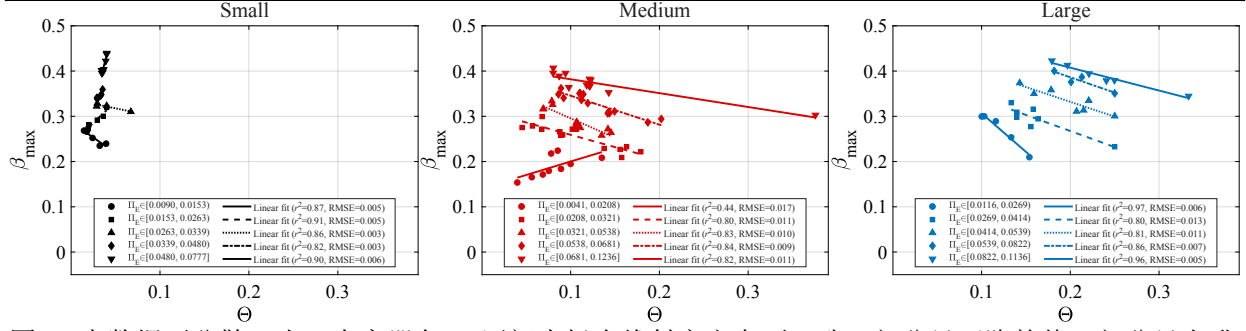


图 15 中数据更分散。小、中容器各 Π_E 区间内拟合线斜率方向不一致，部分呈下降趋势，部分呈上升趋势，并存在交叉；大容器中多数拟合线呈下降趋势。总体来看，即使按 Π_E 分组， $\beta_{\max}$ 与 Θ 之间的关系仍不如 $\beta_{\max}$ 与 Π_E 的关系清晰。

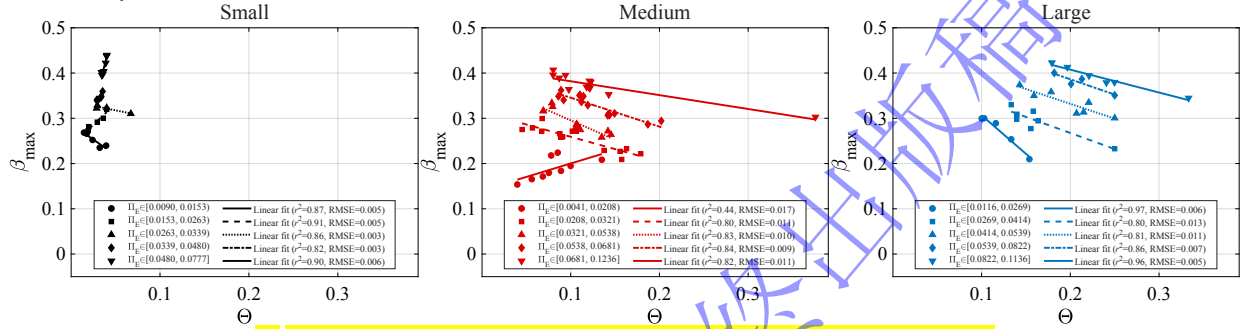


图 15 不同无量纲动能输入区间内无量纲最大半径与初始压差比的关系

Fig.15 Relationship between dimensionless maximum radius and initial pressure-difference ratio at different dimensionless kinetic-energy inputs

上述现象需要结合峰值处的压差构成进一步分析。将总压差表达式（式(17)）写成无量纲形式：

$$\frac{P - P_{\text{in}}}{K} = \Theta + \beta^2 \quad (55)$$

由式(55)可知，在 $\beta = \beta_{\max}$ 时，峰值处总压差由 Θ 项和 $\beta_{\max}^2$ 项共同组成。因此， Θ 对 $\beta_{\max}$ 的影响还与附加压力项 $\beta_{\max}^2$ 有关。为衡量附加压力项在峰值压差中的相对贡献，定义

$$\Phi_{\max} = \frac{\beta_{\max}^2}{\Theta + \beta_{\max}^2} \quad (56)$$

图 16 给出了 $\Phi_{\max}$ 随 Θ 的变化。可以看出， $\Phi_{\max}$ 整体随 Θ 增大而降低。小容器主要位于低 Θ 区间， $\Phi_{\max}$ 大多高于 0.75，说明峰值处总压差以附加压力项为主；中、大容器的 Θ 较高， $\Phi_{\max}$ 明显减小，部分试验点低于 0.5，说明初始压差项的相对作用增强。由此可知， Θ 越大，初始压差项在总压差中的占比越高，空泡膨胀受到的压差抑制作用越强，因此在相近 Π_E 下得到的 $\beta_{\max}$ 越小。

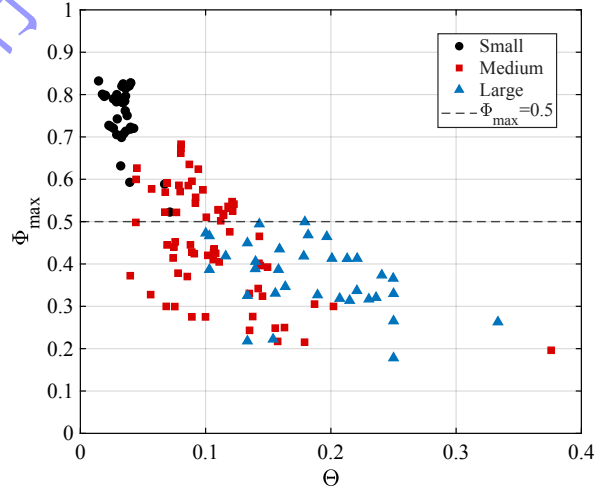


图 16 峰值处附加压力项相对贡献随初始压差比的变化

Fig.16 Variation of the relative contribution of the additional pressure term with initial pressure-difference ratio

压差构成的变化也反映在 $\beta_{\max}$ 对 Π_E 的敏感程度。提取图 13 中各区间的拟合斜率 $k_\beta = \partial\beta_{\max} / \partial\Pi_E$ ，用以表示单位 Π_E 增量对应的 $\beta_{\max}$ 增量。图 17 给出了 k_β 与对应区间 Θ 中位数的关系。三种容器的 k_β - Θ 曲线变化趋势一致： Θ 较小时 k_β 较高，随 Θ 增大先快速下降，随后趋于平缓。这是因为 Θ 较小时，初始压差项相对较弱， $\beta_{\max}$ 对 Π_E 的变化较为敏感，此时 Θ 的增大会明显增强压差抑制作用，因而 k_β 快速降低。当 Θ 继续增大，初始压差项在总压差中的占比已经较高， Θ 的进一步增大对抑制效果的提升作用减弱，因此 k_β 逐渐趋于平缓。

尽管趋势一致，三条曲线并不重合。在 $\Theta \approx 0.07 \sim 0.15$ 区间内，大容器的 k_β 始终高于中容器，可见即使 Θ 相近， $\beta_{\max}$ 随 Π_E 的变化速率仍与容器尺寸有关。 Θ 主要反映 k_β 随初始压差比例变化的总体趋势，不同容器之间的斜率差异仍与完整无量纲参数组有关，因此仅靠 Θ 不足以完全解释 k_β 的差异。

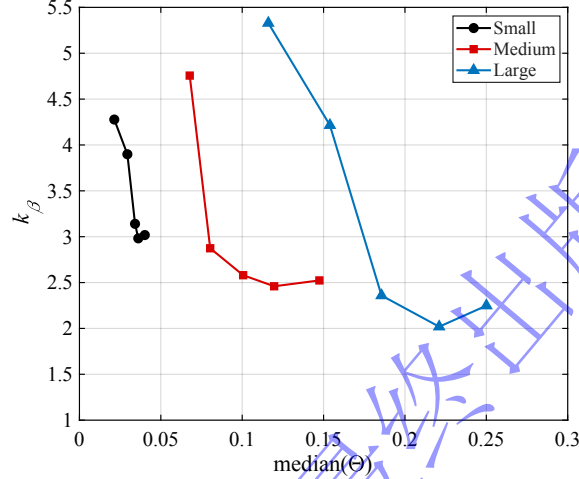


图 17 拟合斜率随初始压差比的变化

Fig.17 Variation of the fitted slope with initial pressure-difference ratio

3.3 $\tau_{\max}$ 与 Π_E 及 Θ 的关系

图 18 给出了不同 Θ 区间内 $\tau_{\max}$ 随 Π_E 的变化，图 19 给出了 $\tau_{\max}$ 随 Θ 的变化。与 $\beta_{\max}$ 相比， $\tau_{\max}$ 的数据分布更加离散。图 18 中，各 Θ 区间内的趋势线斜率均较小，且正负不一，说明 $\tau_{\max}$ 和 Π_E 难以形成稳定的单调关系。较低的 R^2 也表明，仅以 Π_E 难以归纳 $\tau_{\max}$ 的变化。图 19 中， $\tau_{\max}$ 总体上随 Θ 增大而减小。三种容器中，小容器的 $\tau_{\max}$ 整体偏大，中、大容器数据大部分重合；不同容器对应的下降趋势也不完全一致，小容器最明显，大容器最弱。

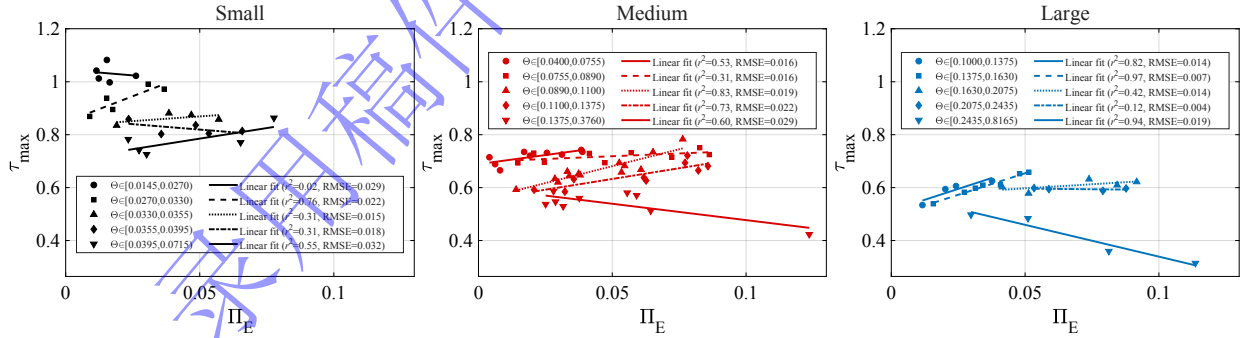


图 18 不同初始压差比区间内无量纲到达时刻与无量纲动能输入的关系

Fig.18 Relationship between dimensionless arrival time and dimensionless kinetic-energy input at different initial pressure-difference ratios

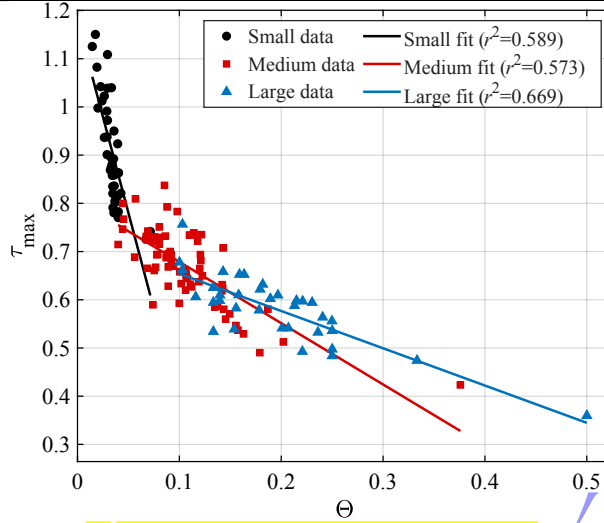


图 19 无量纲到达时刻随初始压差比的变化

Fig.19 Variation of dimensionless arrival time with initial pressure-difference ratio

上述现象与 $\beta_{\max}$ 和 $\tau_{\max}$ 所表征的物理量类型不同有关。 $\beta_{\max}$ 是状态量，对应空泡膨胀达到最大半径时的峰值位置。在达到最大半径时，膨胀动能耗尽，初始动能输入与压差做功之间形成能量平衡；在相近 Θ 条件下，初始压差项的相对作用基本一致， Π_E 的变化主要反映初始动能输入强弱的变化，因此其能够较好地归纳 $\beta_{\max}$ 的变化。 $\tau_{\max}$ 则是过程量，对应空泡从开始膨胀到达到最大半径所经历的时间，不仅取决于 $\beta_{\max}$ ，还取决于整个膨胀阶段径向速度的衰减历程。因此，即使两个工况的 $\beta_{\max}$ 相近，只要空泡径向速度的衰减过程不同，到达最大半径的时间就可能不同。这使得仅以 Π_E 为变量分析 $\tau_{\max}$ 时，数据离散程度明显高于 $\beta_{\max}$ 。

径向速度历程首先受到系统惯性尺度的影响。由模型中的等效惯性项可知，壁面运动对初始径向运动的修正与组合项 $\mu\kappa^2\beta_0^2/(1+\kappa\beta_0^2)$ 有关。因此，在相近 Π_E 条件下，不同容器和不同初始受限程度仍可能具有不同的惯性分配关系，导致空泡径向速度历程出现差异。这与图 18 中各 Θ 区间内 $\tau_{\max}$ 随 Π_E 的趋势线斜率较小且正负不一相对应，也说明初始动能输入并不是决定 $\tau_{\max}$ 的唯一因素。

压差作用时程则进一步影响径向速度衰减过程。前文已从峰值状态分析了 $\beta_{\max}$ 对应的压差构成（式(55)），而对于 $\tau_{\max}$ ，压差作用贯穿整个膨胀阶段。 Θ 所代表的初始压差项在膨胀早期即产生抑制作用，附加压力项则随 β 增大而逐渐增强。因此， Θ 增大时，膨胀初期径向速度受到更强抑制，到达最大半径所需时间相应缩短，这与图 19 中 $\tau_{\max}$ 随 Θ 增大而减小的整体趋势一致。

但 Θ 主要反映初始压差项相对于系统等效体积模量的大小，仍不能完整表征后续附加压力增长、惯性尺度差异和几何尺度差异的共同影响。因此，在相近 Θ 条件下， $\tau_{\max}$ 仍保持一定离散性。图 19 中小容器的 $\tau_{\max}$ 整体偏大，中、大容器数据大部分重合，也说明容器组间差异会影响 $\tau_{\max}$ 的分布范围。

3.4 受限结果与非受限参考值的对比

1.6 节给出的非受限空泡峰值量以 R_p 和 ΔP_0 为特征尺度。为与受限结果进行对比，本节先将非受限结果换算到受限分析所采用的尺度，即以 R_{c0} 和 K 为基准，再比较两种情况的空泡特征量。对于每个试验点，保持初始动能输入和初始压差不变，按 1.6 节中的非受限模型计算无容器约束时的最大半径 $R_{u,\max}$ 。换算到受限尺度后，非受限最大半径参考值为

$$\beta_{u,\max}^{(c)} = \frac{R_{u,\max}}{R_{c0}} = \sqrt{\frac{\Pi_E}{2\Theta}} \quad (57)$$

定义 $\beta_{\max}$ 与参考值之比为

$$\Lambda_\beta = \frac{\beta_{\max}}{\beta_{u,\max}^{(c)}} \quad (58)$$

图 20(a)给出了试验得到的 $\beta_{\max}$ 与 $\beta_{u,\max}^{(c)}$ 的对比，虚线表示 $\beta_{\max} = \beta_{u,\max}^{(c)}$ 。所有试验点均位于参考线下方，说明受限容器中的空泡最大半径低于相同工况下的非受限参考值。同时，不同容器之间存在较清晰的分层，小容器整体位于下方，中容器居中，大容器更接近参考线。图 20(b)给出了 Λ_β 随

$\beta_{u,\max}^{(c)}$ 的变化。不同容器的 Λ_β 呈现出清晰的分层：大容器的 Λ_β 接近 1，中容器居中，小容器最低。这表明容器尺寸越小，约束对空泡最大半径的抑制越明显。

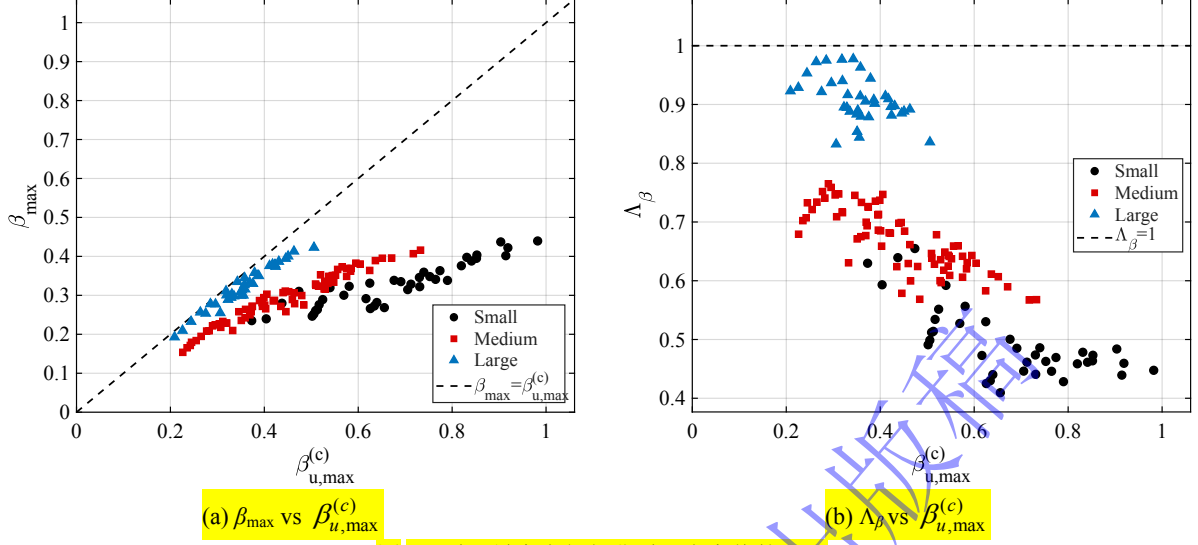


图 20 受限最大半径与非受限参考值的对比
Fig.20 Comparison of the confined maximum radius with the unconfined reference value

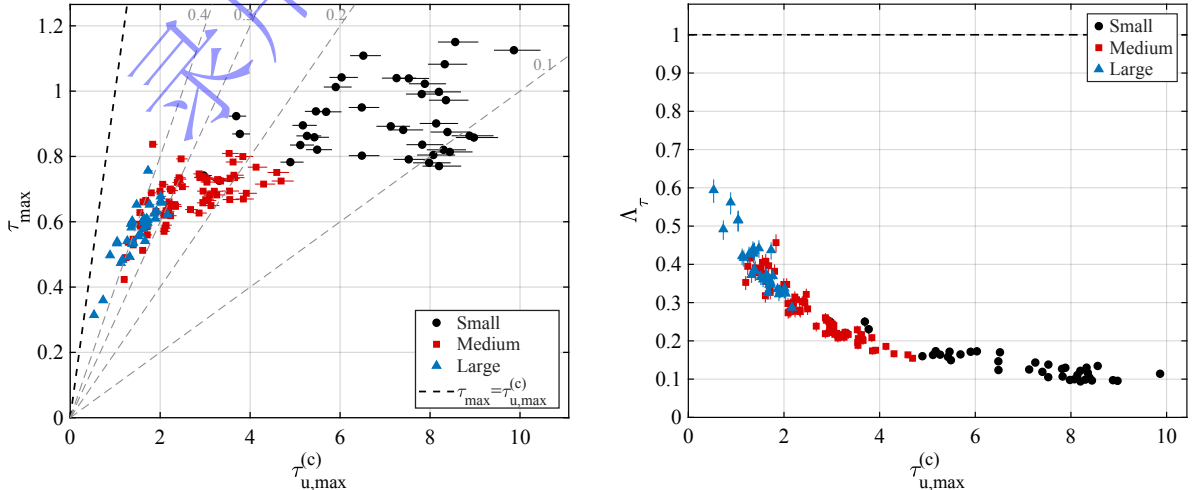
对于非受限到达时刻，与最大半径一致，将式(50)中的非受限时间换算到以 R_{c0} 和 K 为基准的尺度下，可得到到达最大半径时刻的非受限参考值

$$\tau_{u,\max}^{(c)}(q) = \frac{\beta_0}{\sqrt{\Theta}} \beta_{u,\max} I(q) = \frac{\beta_{u,\max}^{(c)}}{\sqrt{\Theta}} I(q) \quad (59)$$

如前所述， $q = \Omega/R_{u,\max}$ 为非受限模型中的外边界尺度参数，参照文献^[21]中非受限柱形空泡模型的取值范围，本文取 $q=20$ 为基准值，并采用 $q=15\sim30$ 表征外边界尺度选取带来的变化范围。定义 $\tau_{\max}$ 与非受限参考值之比为

$$\Lambda_\tau(q) = \frac{\tau_{\max}}{\tau_{u,\max}^{(c)}(q)} \quad (60)$$

图 21(a)给出了试验得到的 $\tau_{\max}$ 与 $\tau_{u,\max}^{(c)}$ 的对比。图中符号按 $q = 20$ 计算，水平范围线表示 $q = 15\sim30$ 时对应的参考值范围。黑色虚线表示 $\tau_{\max} = \tau_{u,\max}^{(c)}$ ，灰色虚线表示 $\tau_{\max} = 0.1\tau_{u,\max}^{(c)}$ 至 $0.4\tau_{u,\max}^{(c)}$ 。可以看出，所有试验点均位于黑色虚线下方，说明受限条件下空泡达到最大半径的时间短于非受限参考值，且大部分数据位于较低比例区间。图 21(b)给出了 Λ_τ 随 $\tau_{u,\max}^{(c)}$ 的变化，图中符号按 $q = 20$ 计算，竖向范围线表示 $q = 15\sim30$ 引起的 Λ_τ 变化范围。与 Λ_β 相比， Λ_τ 整体更小，数据分布也更加离散，说明受限条件对到达最大半径时刻的影响更加明显。



(a) $\tau_{\max}$ vs $\tau_{u,\max}^{(c)}$

(b) $\Lambda\tau$ vs $\tau_{u,\max}^{(c)}$

图 21 受限到达时刻与非受限参考值的对比

Fig.21 Comparison of the confined arrival time with the unconfined reference value

定义平均膨胀速率的非受限参考值为 $\bar{u}_{u,\beta}^{(c)}(q) = \beta_{u,\max}^{(c)} / \tau_{u,\max}^{(c)}(q)$ ，则受限与非受限平均膨胀速率之比为 $\Lambda_{\bar{u}}(q) = \bar{u}_{\beta} / \bar{u}_{u,\beta}^{(c)}(q) = \Lambda_{\beta} / \Lambda_{\tau}(q)$ 。图 22(a)给出了试验 $\bar{u}_{\beta}$ 与 $\bar{u}_{u,\beta}^{(c)}$ 的对比，图 22(b)给出了 $\Lambda_{\bar{u}}$ 随 $\bar{u}_{u,\beta}^{(c)}$ 的变化，符号和范围线含义同前。可以看出， $\bar{u}_{\beta}$ 高于非受限参考值，且容器尺寸越小，高出幅度越大。这一结果与前述 $\Lambda_{\tau} < \Lambda_{\beta} < 1$ 的整体关系一致：受限条件同时降低了空泡最大半径和到达最大半径时刻，但到达时刻的缩短幅度更大，因此平均膨胀速率高于非受限参考值。

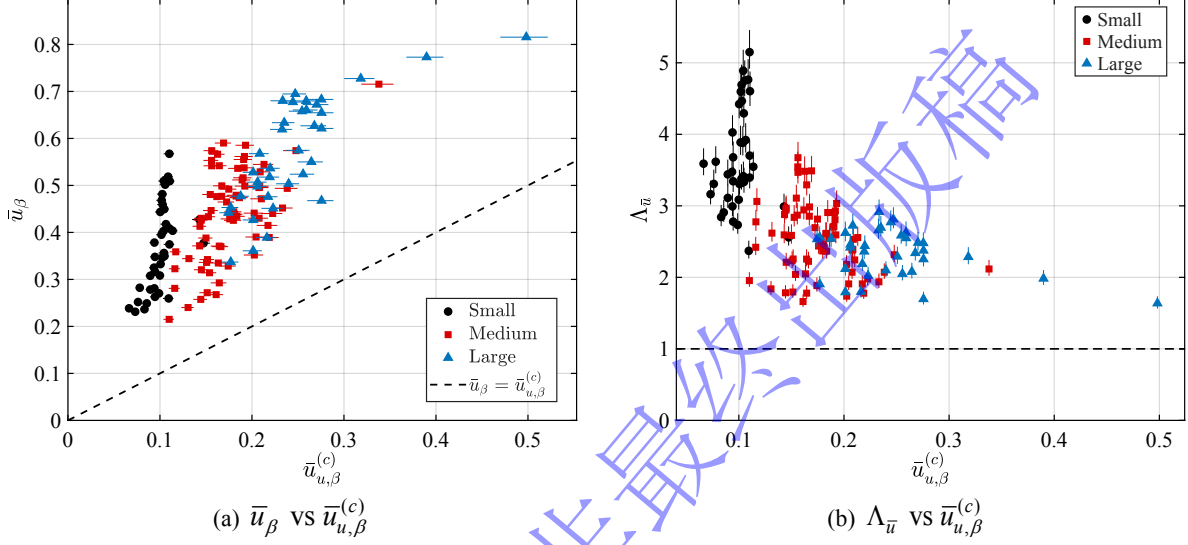


图 22 受限平均膨胀速率与非受限参考值的对比

Fig.22 Comparison of the confined average expansion rate with the unconfined reference value

图 21 和图 22 中的范围线均由 $q=15\sim30$ 的取值范围给出，为分析该取值范围对非受限参考值的影响，图 23 给出了 $\tau_{u,\max}^{(c)}(q) / \tau_{u,\max}^{(c)}(20)$ 和 $\bar{u}_{u,\beta}^{(c)}(q) / \bar{u}_{u,\beta}^{(c)}(20)$ 随 q 的变化。可以看出，在 $q=15\sim30$ 范围内，二者分别位于 0.955~1.060 和 0.943~1.047 区间内。由此可见， q 的取值会改变非受限参考值的具体数值，但在本文取值范围内影响幅度有限。图 21 和图 22 中不同数据点之间的分布差异主要来自试验工况和受限空泡特征量的差异。

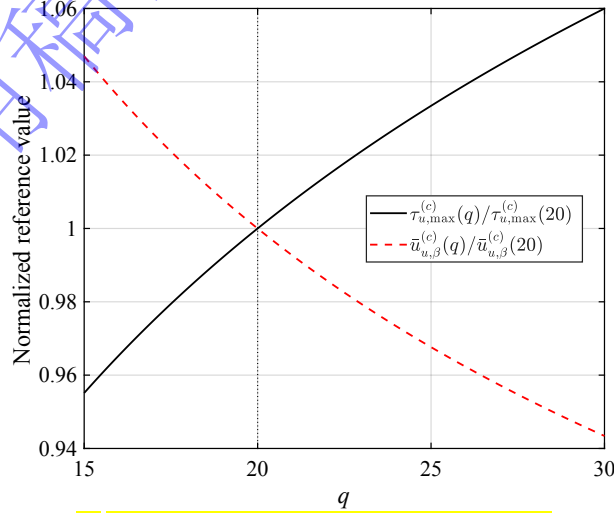


图 23 外边界尺度取值对非受限参考值的影响

Fig.23 Effect of outer-boundary scale selection on the unconfined reference values

4 结论

本文针对液压水锤效应中受限空泡的截面膨胀问题,在柱形空泡截面模型的基础上引入量纲分析方法,将破片动能输入、初始压差、容器约束及壁面惯性效应归纳为一组无量纲参数,并通过破片撞击三种尺寸充液容器的试验进行分析。主要结论如下:

(1) 无量纲最大半径 $\beta_{\max}$ 随无量纲动能输入 Π_E 和初始压差比 Θ 呈规律性变化。给定 Θ 时, $\beta_{\max}$ 随 Π_E 近似线性增大; Θ 越大,同等 Π_E 下的 $\beta_{\max}$ 越小。与 $R_{\max} - v_p$ 关系相比,用 Π_E 和 Θ 整理数据可以明显减小不同容器和工况下 $\beta_{\max}$ 的离散程度。从压差构成来看,峰值处附加压力项占比 $\Phi_{\max}$ 随 Θ 增大而降低,说明初始压差项相对作用的增强是 $\beta_{\max}$ 随 Θ 增大而减小的重要原因。

(2) Π_E 和 Θ 对无量纲到达时刻 $\tau_{\max}$ 的整理效果弱于 $\beta_{\max}$,数据离散程度更高。原因在于 $\beta_{\max}$ 更直接地对应膨胀终点处初始动能输入与压差约束的平衡,而 $\tau_{\max}$ 不仅取决于 $\beta_{\max}$,还取决于膨胀阶段的径向速度变化过程。 Π_E 和 Θ 分别反映无量纲动能输入和初始压差项的强弱,但难以描述附加压力项随半径增长而增强的影响,以及容器壁面惯性和几何尺度差异对速度变化的作用。因此,仅以 Π_E 和 Θ 进行分析时, $\tau_{\max}$ 与二者的关系不如 $\beta_{\max}$ 清晰。

(3) 与相同工况的非受限参考值相比,受限时的最大半径和到达最大半径时刻均降低,但到达时刻相对于参考值的降幅明显大于最大半径。因此,由 $\beta_{\max}$ 和 $\tau_{\max}$ 定义的平均膨胀速率 $\bar{u}_\beta$ 高于非受限参考值,且容器越小,该差异越明显。

参考文献

- [1] 纪杨子燚,李向东,周兰伟,等. 高速侵彻体撞击充液容器形成的液压水锤效应研究进展[J]. 振动与冲击, 2019, 38(19): 242-252. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2019.19.036.
- JI Y Z Y, LI X D, ZHOU L W, et al. Review of study on hydrodynamic ram effect generated due to high-velocity penetrator impacting fluid-filled container[J]. Journal of Vibration and Shock, 2019, 38(19): 242-252. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2019.19.036.
- [2] 纪杨子燚,李向东,周兰伟,等. 高速破片撞击充液容器形成液压水锤的试验研究[J]. 国防科技大学学报, 2019, 41(3): 70-76. DOI: 10.11887/j.cn.201903012.
- JI Y Z Y, LI X D, ZHOU L W, et al. Experimental study on hydrodynamic ram generated by high velocity fragment impacting fluid-filled container[J]. Journal of National University of Defense Technology, 2019, 41(3): 70-76. DOI: 10.11887/j.cn.201903012.
- [3] HEILIG G A, MAY M. The hydrodynamic RAM effect: review of historic experiments, model developments and simulation[J]. Defence Technology, 2025, 44: 150-178. DOI: 10.1016/j.dt.2024.07.010.
- [4] 马丽英,李向东,周兰伟,等. 高速破片撞击充液容器时容器壁面的损伤[J]. 爆炸与冲击, 2019, 39(2): 023302. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0009.
- MA L Y, LI X D, ZHOU L W, et al. Study on wall damage of vessel in high-speed fragment impact liquid-filled vessel[J]. Explosion and Shock Waves, 2019, 39(2): 023302. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0009.
- [5] 张景飞,贾豪博,任柯融,等. 铆接油箱的水锤毁伤效应[J]. 爆炸与冲击, 2023, 43(7): 073301. DOI: 10.11883/bzycj-2022-0275.
- ZHANG J F, JIA H B, REN K R, et al. Damage of hydrodynamic ram effect to riveted fuel tanks[J]. Explosion and Shock Waves, 2023, 43(7): 073301. DOI: 10.11883/bzycj-2022-0275.
- [6] 李向东,周兰伟,纪杨子燚. 目标易损性评估及应用[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2022: 105-106.
- [7] PENG M C, LI X D, LU F D, et al. Ignition criteria for diesel fuel tanks under high-velocity impact of spherical tungsten fragment[J/OL]. Defence Technology, 2026[2026-04-28]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214914726001182>. DOI: 10.1016/j.dt.2026.03.039.
- [8] LI Q C, MA S X, JI Y Z Y, et al. Investigation of high-velocity fragment penetration characteristics and

- cavity dynamics in a multi-compartment liquid-filled container[J/OL]. Defence Technology, 2026[2026-04-28]. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2214914726000322>. DOI: 10.1016/j.dt.2026.01.017.
- [9] 马丽英, 李向东, 周兰伟, 等. 高速破片撞击充液容器拖拽阶段气腔特性研究[J]. 爆炸与冲击, 2018, 38(6): 1412-1418. DOI: 10.11883/bzycj-2017-0188.
- MA L Y, LI X D, ZHOU L W, et al. Characteristics of dragging period cavity formation in liquid filling container by fragment impacting[J]. Explosion and Shock Waves, 2018, 38(6): 1412-1418. DOI: 10.11883/bzycj-2017-0188.
- [10] JI Y Z Y, LI X D, ZHOU L W. Size effects and nondimensional similarity of hydrodynamic-ram-induced cavities in finite containers[J]. Journal of Fluids and Structures, 2026, 145: 104604. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2026.104604.
- [11] GOSS A E, BONIS J P, BURTON G C. An arbitrary Lagrange-Eulerian investigation of HRAM shallow jet pre-spurt formation and time sensitivities to impact plate dynamics[J]. International Journal of Impact Engineering, 2022, 167: 104275. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104275.
- [12] GUO Z T, CHEN T, ZHANG W, et al. Cavity dynamics in hydrodynamic ram analysis of confined containers under ballistic impacts[J]. Ocean Engineering, 2020, 218: 108036. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.108036.
- [13] GUO Z T, CHEN T, MU Z C, et al. An investigation into container constraint effects on the cavity characteristics due to high-speed projectile water entry[J]. Ocean Engineering, 2020, 210: 107449. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2020.107449.
- [14] GUO Z T, CHEN T, ZHAO G, et al. Hydrodynamic ram analysis in high-speed projectile penetrating into water-filled vessels[J]. Ocean Engineering, 2022, 251: 111092. DOI: 10.1016/j.oceaneng.2022.111092.
- [15] DELETOMBE E, FABIS J, DUPAS J, et al. Experimental analysis of 7.62 mm hydrodynamic ram in containers[J]. Journal of Fluids and Structures, 2013, 37: 1-21. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2012.11.003.
- [16] 郭子涛, 张伟, 郭钊, 等. 截卵形弹水平入水的速度衰减及空泡扩展特性[J]. 爆炸与冲击, 2017, 37(4): 727-733. DOI: 10.11883/1001-1455(2017)04-0727-07.
- GUO Z T, ZHANG W, GUO Z, et al. Characteristics of velocity attenuation and cavity expansion induced by horizontal water-entry of truncated-ogive nosed projectiles[J]. Explosion and Shock Waves, 2017, 37(4): 727-733. DOI: 10.11883/1001-1455(2017)04-0727-07.
- [17] MANSOOR M M, MARSTON J O, VAKARELSKI I U, et al. Water entry without surface seal: extended cavity formation[J]. Journal of Fluid Mechanics, 2014, 743: 295-326. DOI: 10.1017/jfm.2014.35.
- [18] WATSON D A, JOSEPH Z C, VIDANA-FUENTES D A, et al. Water entry dynamics of hydrophobic spheres bounded by semi-infinite cylindrical pipes[J]. Physics of Fluids, 2025, 37(11): 112115. DOI: 10.1063/5.0300541.
- [19] LV K, LIU J L, ZHANG X M. Asymmetric cavity evolution mechanisms in high-speed vertical water entry under wall confinement[J]. Physics of Fluids, 2026, 38(2): 023310. DOI: 10.1063/5.0312839.
- [20] HE M, WANG Y X, LIN E F, et al. Numerical simulation and characteristic analysis of water entry cavitation in limited-domain water[J]. Journal of Marine Science and Application, 2026, 25: 393-402. DOI: 10.1007/s11804-025-00691-8.
- [21] LEE M, LONGORIA R G, WILSON D E. Cavity dynamics in high-speed water entry[J]. Physics of Fluids, 1997, 9(3): 540-550. DOI: 10.1063/1.869472.
- [22] JI Y Z Y, LI X D, HU B C, et al. Analysis of confined cavity evolution and related pressure created by hydrodynamic ram[J]. Journal of Fluids and Structures, 2024, 124: 104020. DOI: 10.1016/j.jfluidstructs.2023.104020.

- [23] JI Y Z Y, LI X D, ZHOU L W. A confined cylindrical bubble model for cavities induced by hydrodynamic ram[J]. *Physics of Fluids*, 2025, 37(8): 086116. DOI: 10.1063/5.0281302.
- [24] WANG G, GUO L, CHANG X, et al. Analysis of hydrodynamic ram and cavity evolution characteristics during high-velocity penetration of $Zr_{55}Cu_{30}Al_{10}Ni_5$ fragments into water-filled containers[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2024, 187: 104900. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2024.104900.
- [25] FOUREST T, LAURENS J M, DELETOMBE E, et al. Analysis of bubbles dynamics created by hydrodynamic ram in confined geometries using the Rayleigh–Plesset equation[J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2014, 73: 66-74. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.05.008.
- [26] FOUREST T, LAURENS J M, DELETOMBE E, et al. Confined Rayleigh–Plesset equation for hydrodynamic ram analysis in thin-walled containers under ballistic impacts[J]. *Thin-Walled Structures*, 2015, 86: 67-72. DOI: 10.1016/j.tws.2014.10.003.
- [27] ILINSKII Y A, ZABOLOTSKAYA E A, HAY T A, et al. Models of cylindrical bubble pulsation[J]. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 2012, 132(3): 1346-1357. DOI: 10.1121/1.4730888.
- [28] LINGENFELTER A J. Cavity geometric features and entrainment characterization resulting from a ballistically induced hydrodynamic ram event[D]. Ohio: Air Force Institute of Technology, 2016: 123-126.