

文章编号: 1001-1455(2009)04-0425-04

# 修正的 Friedlander 方程指数衰减因子<sup>\*</sup>

程 祥<sup>1</sup>, 杨 明<sup>1,2</sup>, 郭亚丽<sup>1</sup>, 韩 焱<sup>1</sup>

(1. 中北大学电子测试技术国防重点实验室, 山西 太原 030051;

2. 中北大学理学院, 山西 太原 030051)

**摘要:** 发现修正的 Friedlander 方程中指数衰减因子的对数的对数是时间的线性函数, 运用该规律得出了一个能够精确描述冲击波超压随时间传播规律的数学模型。与实测信号比较表明, 该模型能够精确地表达冲击波随时间传播规律, 具有一定的通用性和预测性。

**关键词:** 爆炸力学; 指数衰减因子; 超压测试; Friedlander 方程; 空中爆炸; 超压

**中图分类号:** O382.1

**国标学科代码:** 130 · 3020

**文献标志码:** A

## 1 引 言

对空中爆炸这一类典型的爆炸现象, 已有了大量的研究, 并已建立了相应的理论分析系统<sup>[1]</sup>。但是, 在本质上爆炸波在空气中的传播是涉及非线性运动方程的高速动力学过程, 除了爆炸源的自身特性外, 还对环境条件极为敏感, 这些都给理论分析和实验研究带来了较大的困难<sup>[2]</sup>。

压力是描述空气中爆炸时爆炸波基本性质的主要参数, 大量的研究工作集中在利用实验手段获得真实爆炸过程中的记录结果, 并在此基础上给出压力的实验统计模型。W. E. Baker<sup>[3]</sup>给出了描述冲击波压力的几个经验公式, 其中提到的修正的 Friedlander 方程能够较好地描述冲击波压力正相变化的细节, 而且在形式上又不太复杂。本文中基于修正的 Friedlander 方程, 对方程中的一个起关键作用而且性质非常复杂的指数衰减因子进行更深入的分析, 以期得到一个能够精确描述冲击波随时间传播规律的数学模型。

## 2 问题描述

修正的 Friedlander 方程能够较好地反映理想冲击波正相压力的变化趋势

$$p(t) = p_0 + p_s^+ (1 - t/T^+) e^{-\alpha t/T^+} \quad 0 \leq t \leq T^+ \quad (1)$$

式中:  $p_0$  是环境气压,  $p_s^+$  是最大正相峰值超压,  $T^+$  是正压作用时间, 指数衰减因子  $c$  是经验常数。对实测信号的分析发现, 指数衰减因子的性质非常复杂, 对某一定点压力传感器来说, 参数  $c$  随时间  $t$  的变化实际上是一条未知其变化规律的曲线。周昕清<sup>[4]</sup>、李翼祺等<sup>[5]</sup>提供了参数  $c$  的数学模型, 该模型是最大正相峰值超压  $p_s^+$  和时间  $t$  的函数, 而且随

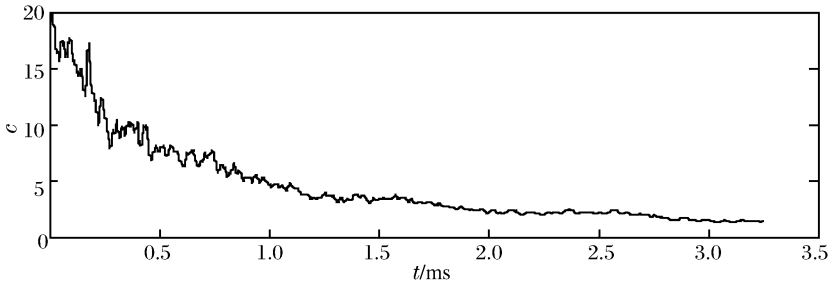


图 1 某冲击波信号的指数衰减因子

Fig. 1 Exponential attenuation factor of a typical shock signal

\* 收稿日期: 2008-02-25; 修回日期: 2008-03-31

作者简介: 程 祥(1982—), 男, 硕士研究生。

着峰值超压  $p_s^+$  的取值范围不同而不同。但运用该表达式得出的结果存在着较大的误差。为了能最大限度地逼近实测信号减少误差,需找到参数  $c$  的更为精确的数学模型。运用式(1)可以倒推参数  $c$  的表达式为

$$c = \left(\frac{T^+}{t}\right) [\ln((T^+ - t)p_s^+) - \ln(T^+ (p(t) - p_0))] \quad 0 \leq t \leq T^+ \tag{2}$$

由式(2)可以得到参数  $c$  的时间历程曲线。图 1 为某冲击波实测信号参数  $c$  随时间变化曲线,从图中可以发现参数  $c$  随时间变化呈衰减趋势而且是非线性的。

3 指数衰减因子

通过对实测信号的研究分析发现了 1 个特殊的线性关系,即参数  $c$  的对数的对数  $\ln(\ln c)$  与时间  $t$  呈线性关系

$$kt + m = \ln(\ln c) \quad 0 \leq t \leq T^+ \tag{3}$$

式中: $k$  和  $m$  为待定参数。图 2 中实线为对应图 1 实测信号的  $\ln(\ln c)$  曲线。

通过式(3)代入实测信号运用拟合的方法,可以确定参数  $k$  和  $m$ 。设矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ N & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} k \\ m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \ln(\ln c_1) \\ \ln(\ln c_2) \\ \ln(\ln c_3) \\ \vdots \\ \ln(\ln c_N) \end{pmatrix}$$

式中:矩阵  $\mathbf{A}$  的第 1 列表示抽样后实测信号各个时刻(或点数),矩阵  $\mathbf{B}$  表示相应时刻的  $\ln(\ln c)$  值。式(3)是关于  $k$  和  $m$  的线性方程,代入实测信号建立线性方程组

$$\mathbf{AX} = \mathbf{B} \tag{4}$$

运用最小二乘法,式(4)变为

$$\mathbf{A}^T \mathbf{AX} = \mathbf{A}^T \mathbf{B} \tag{5}$$

则

$$\mathbf{X} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{B} \tag{6}$$

求解方程(6)可以确定参数  $k$  和  $m$ 。图 2 中虚线为拟合的指数衰减因子曲线。

运用上述方法分析多组实测数据可以发现:在取相同点数的情况下,参数  $k$  随距离等因素的变化并不敏感,可以很容易地确定,而参数  $m$  则与测点离爆源距离  $r$  等其他因素有关。对不同距离处的传感器来说,运用上述拟合方法可确定参数  $m$ ,这样就把确定参数  $c$  的问题转化为确定参数  $m$  的问题,从而提高拟合精度并相应地简化问题。

4 冲击波超压函数

把参数  $k$  与  $m$  带入式(1)可以确定冲击波超压函数

$$p(t) = p_0 + p_s^+(1 - t/T^+)e^{-ct/T^+} \quad 0 \leq t \leq T^+ \tag{7}$$

式中: $c = \exp(\exp(kt + m))$ 。运用式(7)与实测信号(正相段)进行比较(见图 3),可以看出理论曲线与

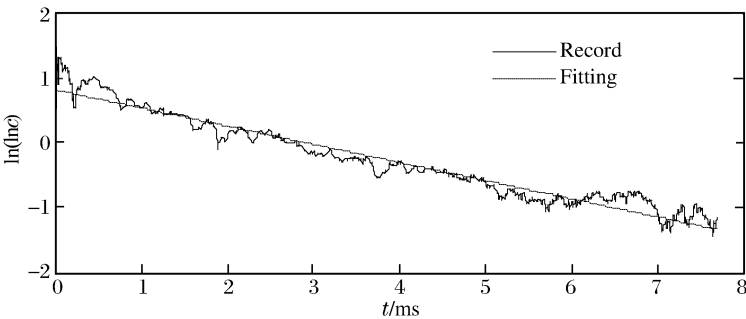


图 2 指数衰减因子对数的对数  
Fig. 2 Logarithm of logarithm of exponential attenuation factor

实测信号吻合较好。

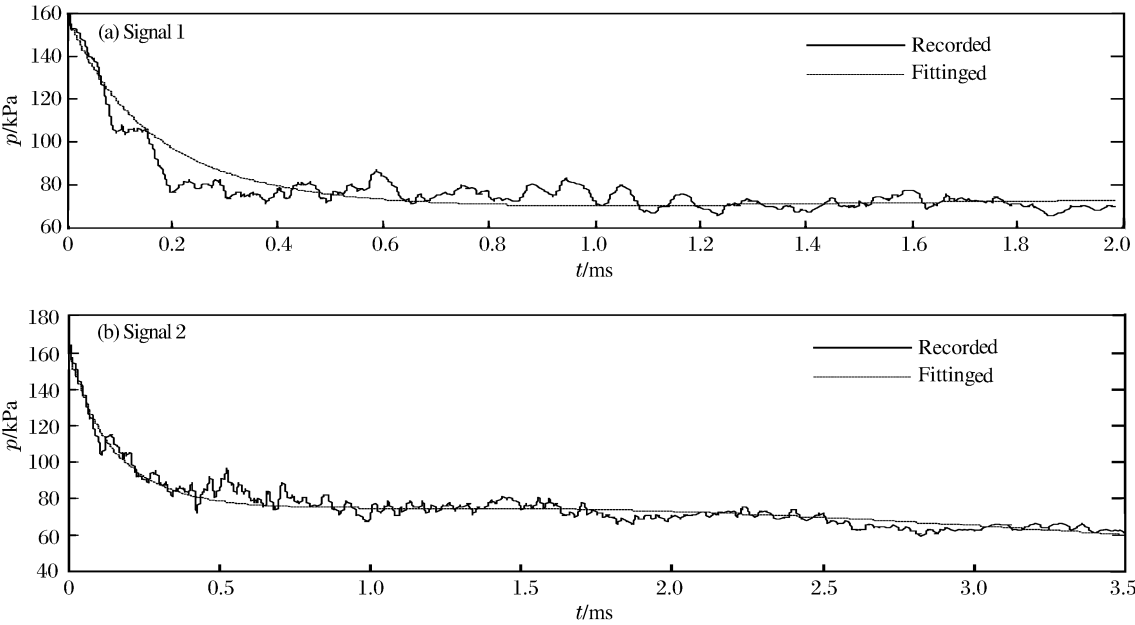


图 3 2 组信号的冲击波超压

Fig. 3 Overpressures of two measurement signals and their fitting

5 误差分析

设相对误差  $\epsilon$  为

$$\epsilon = \frac{|p_{re} - p_{fit}|}{p_{re}} \tag{8}$$

式中： $p_{re}$ 为实测信号， $p_{fit}$ 为理论数据。图 4 所示为对应图 3 中的 2 个冲击波实测信号与冲击波超压函数预测曲线的相对误差和平均相对误差。从图 4(a)中可以看到，当实测信号存在大的突跃时，相对误差会变大。随着时间的推移，信号变平滑后误差就会越来越小。但是突跃部分占的比例非常小，如果只选取前面更少的点数拟合，则会进一步减小突跃点处的误差。而从图 4(b)可以看到，当实测信号没有突跃时，相对误差将会非常小，整个时间段内平均相对误差都在 0.20 以内。而从图 4 可以看出，平均相对误差都在 0.10 以内。

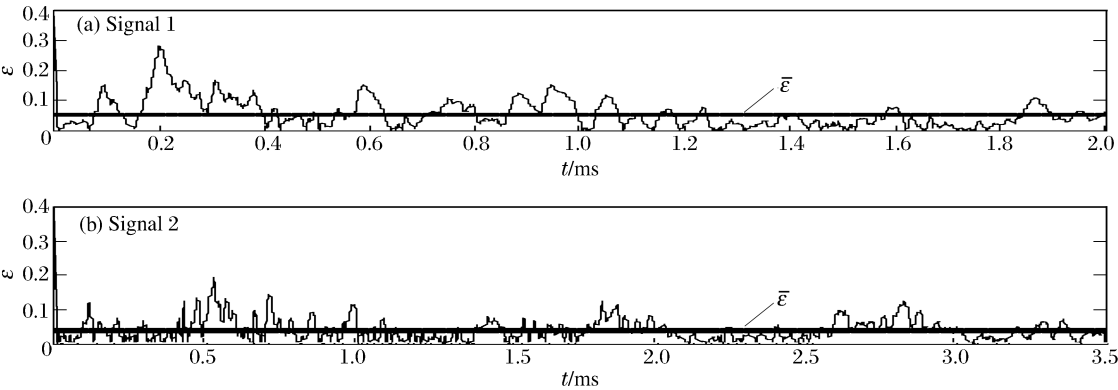


图 4 冲击波超压的相对误差

Fig. 4 Relation errors of overpressures

