文章编号： 1001-1455(2005)05-0430-07

连续小波变换离散化的爆炸振动特征分析*

林大超[1]，白春华[2]

（1. 华北科技学院建筑工程系，北京 101601；
2. 北京理工大学机电工程学院，北京 100081）

摘要： 应用连续小波变换的离散化关系，针对一个改进的 L-P(littlewood-paley)小波基函数，给出了一种实现频率完全分割的时频特征分析方法，并对爆炸振动时频特征进行了研究。80 kg TNT 地面爆炸时地面垂向振动速度的时间能量密度分布情况表明，在质点振动峰值速度到达时刻爆炸振动的频率范围比较宽，而其他时刻的振动频率相对较为集中，时频能量分布的峰值正好对应于爆炸振动速度的峰值到达时间。基于小波变换的爆炸振动频谱特征与 Fourier 变换的结果具有良好的一致性。此外，还给出了利用小波变换结果建立爆炸振动随机演变理论模型的基本方法。

关键词： 爆炸力学；时频特征；小波变换；爆炸振动；随机振动

中图分类号： O382；TD235. 1　　**国标学科代码：** 130・35　　**文献标志码：** A

1　引　言

小波变换在时域和频域都具有很好的局部化性质，能较好地解决时间和频率分辨率的矛盾。对于信号的低频成分，可以采用宽时窗使时域分辨率低而频域分辨率高，对于信号的高频成分，则可以采用窄时窗使时域分辨率高而频域分辨率低。小波变换这种自适应分辨分析的优良性质，使它在信号处理领域获得了成功的应用。小波变换在时频域有很好的局部化性质，是研究时频分析的重要工具。对于爆炸振动这类非平稳随机过程，小波变换方法提供了十分有效的理论基础。

事实上，小波变换方法已经在爆炸振动研究中得到应用。这些工作包括应用小波变换方法对爆炸振动信号时变频谱特征的提取[1~3]，不同频带上振动能量分布情况与爆炸发生条件之间的关系[4]以及小波变换方法在爆炸振动安全性分析方面的应用[5]。然而，爆炸振动含有丰富的高频振动分量，目前的理论处理还不能较好地适应这部分分量特征识别。虽然采用小波包方法可以克服这一困难[6]，但是用小波包分析结果直接进行数学建模难度比较大。鉴于此，本文中应用一种改进的 L-P(littlewood-paley)小波基函数[7]，在连续小波变换理论基础上通过离散化处理获得一种实现频率完全分割的时频特征提取技术，并进一步给出爆炸振动激励随机演变模型的建立方法。

2　理论原理

如果将爆炸地震效应的地运动视为零均值，且具有 Gauss 特性的非平稳随机过程，那么，可以利用其小波变换系数对该过程进行描述。任给均方可积函数 $x(t)$，有小波变换及其逆变换

$$W_{\varphi}x(a,b)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\varphi_{a,b}(t)\mathrm{d}t \tag{1}$$

$$x(t)=C_{\varphi}^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}a^{-2}W_{\varphi}x(a,b)\varphi_{a,b}(t)\mathrm{d}a\mathrm{d}b \tag{2}$$

式中：$W_{\varphi}x(a,b)$为小波变换系数，$\varphi_{a,b}(t)$为小波基函数 $\varphi(t)$的伸缩与平移变换形式，它满足方程

* **收稿日期：** 2004-09-27；**修回日期：** 2005-01-04
基金项目： 国家自然科学基金项目(10372017)
作者简介： 林大超(1964—　)，男，博士，教授。

$$\varphi_{a,b}(t)=|a|^{-1/2}\varphi[(t-b)/a] \qquad a,b\in \mathbf{R}^{+} \tag{3}$$

式中：参数 a 反映了在 $\varphi_{a,b}(t)$ 所在频带上 x(t)对频率分布的贡献，参数 b 是对 t=b 及其邻域上基函数的局部化。一般将参数 a 称为尺度因子，参数 b 称为平移因子。在方程(2)中，参数 C_φ 满足

$$C_\varphi=\int_{-\infty}^{\infty}|\Phi(\omega)|^2/|\omega|\,\mathrm{d}\omega \tag{4}$$

它取有限值，且

$$\Phi(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

此即为函数 φ(t)的 *Fourier* 变换。式中，变量 ω 为圆频率，它与频率 f 的关系为：ω=2πf。

事实上，当 a＞ 0 时，有

$$\Phi_{a,b}(\omega)=a^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi[(t-b)/a]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega b}\sqrt{a}\,\Phi(a\omega) \tag{6}$$

利用 *Fourier* 变换的 *Parseval* 恒等式，可得小波变换的 *Parseval* 恒等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}W_\varphi x(a,b)W_\varphi^{*}y(a,b)a^{-2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b=C_\varphi\int_{-\infty}^{\infty}x(t)y^{*}(t)\,\mathrm{d}t \tag{7}$$

式中：上标 * 表示函数的复共轭。

对尺度参数和时间中心参数进行离散化，其基本关系为

$$a_j=\sigma^j \tag{8}$$

$$b_j=(j-1)\Delta b \tag{9}$$

式中：j 为离散点的标号，代表了小波变换的尺度水平，σ 为尺度参数离散化过程中所选取的特征参数，Δb 为离散化过程所选取的离散时间间隔。在数值积分过程中，有

$$\Delta b_j=0.5[(b_{j+1}-b_j)+(b_j-b_{j-1})]=\Delta b \tag{10}$$

$$\Delta a_j=0.5[(a_{j+1}-a_j)+(a_j-a_{j-1})]=0.5\sigma^j(\sigma-\sigma^{-1}) \tag{11}$$

离散化后，小波变换式(1)及其反演公式(2)可以分别改写为

$$W_\varphi x(a_j,b_k)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\varphi_{a_j,b_k}^{*}(t)\,\mathrm{d}t=a_j^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)\varphi^{*}[(t-b_k)/a_j]\,\mathrm{d}t \tag{12}$$

$$x(t)=\sum_k\sum_j M\Delta b a_j^{-1}W_\varphi x(a_j,b_k)\varphi_{a_j,b_k}(t) \tag{13}$$

式中：$M=\dfrac{\sigma^2-1}{2\sigma C_\varphi}$。

L-P 小波基函数具有很好的频率分割特性，但它所给出的频率划分宽度比较宽，不利于提高频率分辨率，据此，*B. Basu* 等[7]建议了一个改进的 *L-P* 小波基函数

$$\varphi(t)=\pi(\sigma-1)^{-1}[\sin(\sigma\pi t)-\sin(\pi t)]t^{-1} \tag{14}$$

其 *Fourier* 变换为

$$\Phi(\omega)=\begin{cases}1/\sqrt{\sigma-1} & \pi\leqslant|\omega|\leqslant\sigma\pi\\ 0 & |\omega|<\pi \quad \text{or} \quad |\omega|>\sigma\pi\end{cases} \tag{15}$$

式中：σ 为根据实际问题的要求确定的参数，其值介于 1～2 之间。当 σ=2 时，式(14)和(15)即为 *L-P* 小波基函数。当 σ 接近于 1 时，从式(15)可知，改进的 *L-P* 小波基函数所给划分的频率宽度非常窄，能较好地满足提高频率分辨率的要求。

3　时频特征关系

在式(7)中，若令 $x(t)=y(t)$，可以得到振动信号 $x(t)$ 的内积表达式

$$\langle x(t),x(t)\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)^2\,\mathrm{d}t=C_\varphi^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}[W_\varphi x(a,b)]^2a^{-2}\,\mathrm{d}a\,\mathrm{d}b \tag{16}$$

在这一方程中，$|W_\varphi x(a,b)|^2/(C_\varphi a^2)$ 不是瞬时的时间功率谱密度，但是它可以被看作为平面(a,b)上

的能量密度函数。换句话说，$|W_\varphi x(a,b)|^2 \Delta a \Delta b/(C_\varphi a^2)$表示了在尺度中心 a 和时间中心 b 处，尺度间隔为 Δa、时间间隔为 Δb 时的功率。将方程(16)关于尺度参数 a 的积分离散化，有

$$E=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)^2 \mathrm{d}t=\sum_j E_j \tag{17}$$

式中

$$E_j=\int_{-\infty}^{\infty} |g_j(b)|^2 \mathrm{d}b \tag{18}$$

而

$$|g_j(b)|^2=M[W_\varphi x(a_j,b)]^2/a_j \tag{19}$$

应用 Fourier 变换的 Parseval 恒等式，可以得到

$$E_j=\pi^{-1}\int_0^{\infty} |G_j(\omega)|^2 \mathrm{d}\omega=2\int_0^{\infty} |G_j(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{20}$$

式中：$G_j(\omega)$为 $g_j(b)$的 Fourier 变换。

根据小波变换的频率局部化性质，对于频带范围为$[1/(2a_j),\ \sigma/(2a_j)]$的第 j 个尺度水平，式(20)改写为

$$E_j=2\int_{1/(2a_j)}^{\sigma/(2a_j)} |G_j(f)|^2 \mathrm{d}f=2\int_{1/(2a_j)}^{\sigma/(2a_j)} |G(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{21}$$

式中：$G(f)$为原始信号 $g(t)$的 Fourier 变换。

第 j 个尺度水平对应的频带宽度为 $\Delta f=\sigma/(2a_j)-1/(2a_j)$，在时间间隔 Δb 内信号的平均能量为

$$S_j=\frac{\Delta b}{\Delta f}\int_{\pi/a_j}^{\sigma\pi/a_j} |G(f)|^2 \mathrm{d}f=\frac{2a_j\Delta b}{\sigma-1}\int_{\pi/a_j}^{\sigma\pi/a_j} |G(f)|^2 \mathrm{d}f \tag{22}$$

考虑到式(21)，可得

$$S_j=a_j(\sigma-1)^{-1}\Delta b E_j \tag{23}$$

将式(18)代入式(17)，再代入式(23)，有

$$S_j=M(\sigma-1)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}[W_\varphi x(a_j,b)]^2 \mathrm{d}b \tag{24}$$

对位置参数 b 的积分进行离散化，从上式可以得到

$$S_j=M(\sigma-1)^{-1}\Delta b\sum_i[W_\varphi x(a_j,b_i)]^2 \tag{25}$$

由此可以推知，在频带 j 上，位于 b_i处的信号的能量密度

$$S_{\mathrm{CWT}}(b_i,f_j)=M(\sigma-1)^{-1}\Delta b^2[W_\varphi x(a_j,b_i)]^2 \tag{26}$$

它给出了 b_i时刻振动信号 $x(t)$在频率 f_j处的能量值，也就是振动的时间能量密度函数。

由于频带间不存在彼此重叠现象，因此根据给定频带上不同位置参数 b_i的振动能量分布密度进行求和，可以近似给出振动信号随频率变化的功率谱密度分布情况

$$S_{\mathrm{F}}(f_j)=\sum_i S_{\mathrm{CWT}}(b_i,f_j)=M(\sigma-1)^{-1}\Delta b\sum_i[W_\varphi x(a_j,b_i)]^2 \tag{27}$$

类似地，可以给出建立在小波变换基础上的瞬时功率谱密度函数

$$S_{\mathrm{W}}(f)|_{t=b_i}=\sum_j S_{\mathrm{CWT}}(b_i,f_j)=M(\sigma-1)^{-1}\Delta b^2\sum_j[W_\varphi x(a_j,b_i)]^2 \tag{28}$$

4 爆炸振动时频特征分析及其理论模型的建立

80 kg TNT 在地面爆炸时，在距离为 50 m 和 160 m 处测试得到的地面垂向振动速度如图 1 所示。实验场地是具有砂石混合结构的表土层。振动测试的采样时间间隔为 0.5 ms。数值计算增量为 0.5 ms，尺度参数离散化过程中所选取特征参数的取值为 $\sigma=2^{1/4}$。根据小波变换的尺度与信号频率范围的对应关系，考虑到信号的实际频率特征范围，小波变换离散化数值计算尺度水平的取值为 $j=-10\sim-42$。

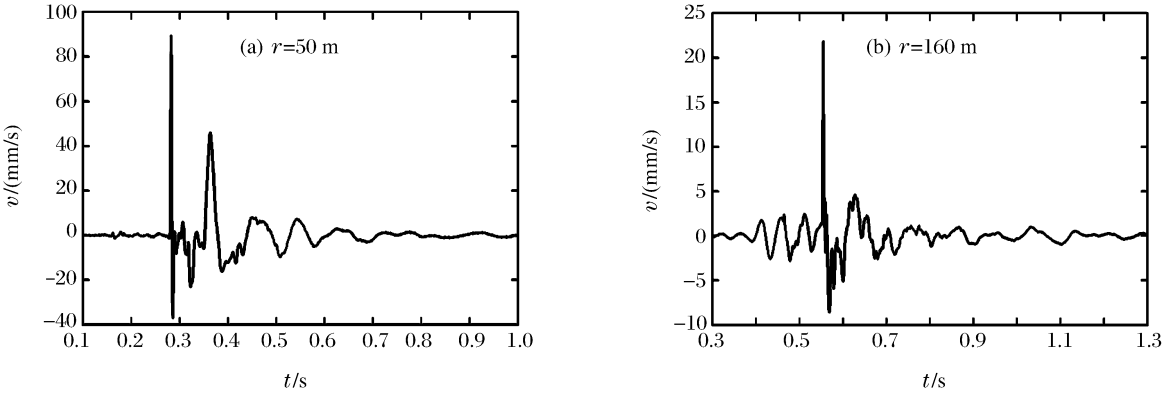

图 1　80 kg TNT 地面爆炸时地面垂向振动速度实验测试结果

Fig. 1　Experimental results of vertical ground vibration velocities for 80 kg TNT explosion

对应于不同尺度水平 j，应用小波变换关系(12)和 L-P 小波基函数(14)，通过离散化关系式(10)和(11)建立爆炸振动速度小波变换数值分析过程，计算得到图 1 所给爆炸振动速度在尺度水平为－10～－40 之间的小波系数 $W_\varphi v$，如图 2 所示。不同尺度水平 j 的小波系数 $W_\varphi v$ 描述了频带$[1/(2a_j),\sigma/(2a_j)]$上振动速度的相对能量分布情况。小波系数的 Fourier 变换功率谱密度 $S_F(W_\varphi v)$分布规律如图 3 所示。从图中可以看出，所采用的小波变换方法实现了无频率重叠的频带分割结果。

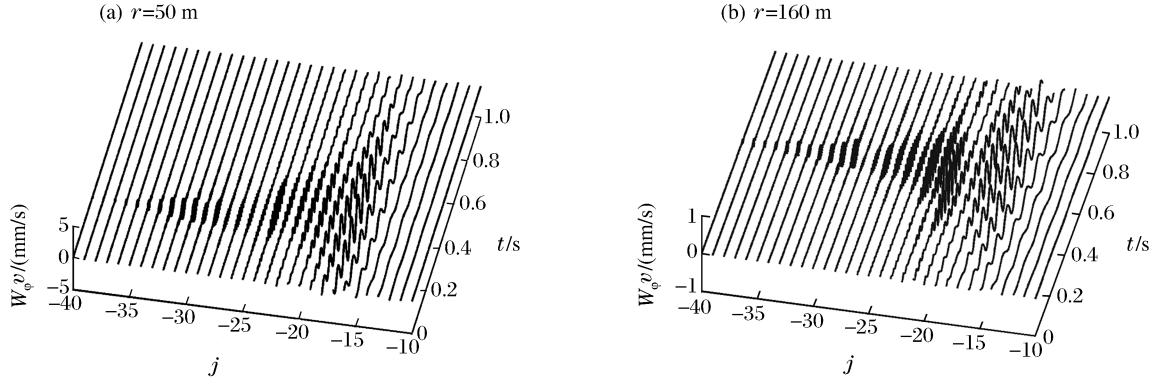

图 2　地面垂向振动速度在不同尺度水平的小波变换系数

Fig. 2　Wavelet transform coefficients of vibration velocities in different scale levels

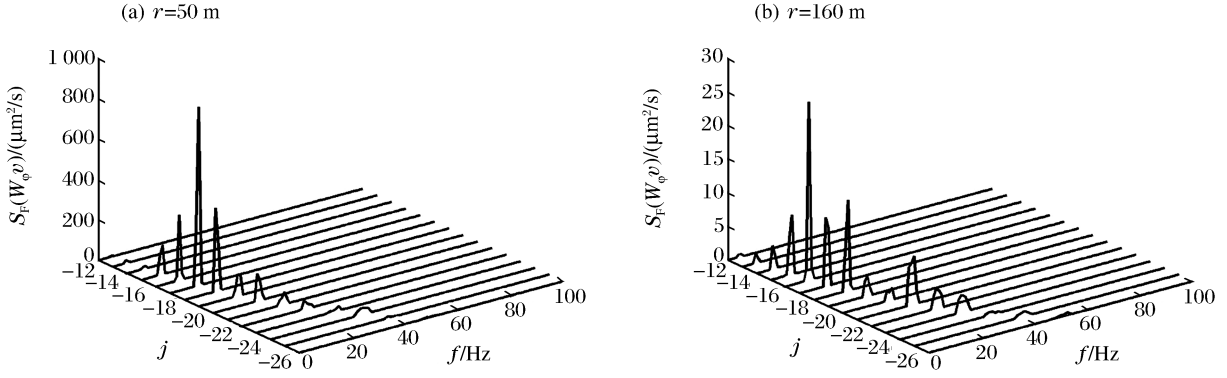

图 3　不同尺度水平小波变换系数的 Fourier 功率谱

Fig. 3　Fourier power spectra of wavelet coefficients in different scale levels

以不同尺度水平小波系数的计算结果为基础，利用式(26)计算出爆炸振动速度的时间能量密度分布函数，如图 4 所示。在振动峰值速度到达时刻爆炸振动的频率范围比较宽，而其他时刻振动频率相对较为集中。与图 1 的时间历史实验测试结果对比发现，图中时频能量分布的峰值正好对应于爆炸振动速度的峰值到达时间，因此基于小波变换的爆炸振动时频分析结果反映了实际振动过程的基本特征。

应用式(27)和式(28)可以计算得到爆炸振动速度功率谱密度的频率分布规律和爆炸振动速度功率谱的时间变化规律。图 5 给出了小波变换与 Fourier 变换结果的对比，二者基本吻合。由于小波变换采用了频带的左端点值，而不是频带中心点，因此其结果向低频部分有所偏移。

虽然爆炸振动是一个宽带随机过程，但是可以通过小波变换把他们分解成为用小波系数描述的一系列窄带过程。从上面的数值模拟计算可以看出，小波系数能够用 Fourier 变换进行分析，每一个给定尺度水平 j 的能量只对该狭窄频率带的振动分量发生作用。因此，可以采用谐振函数对这一振动分量进行近似，它的中心(优势)频率为

$$\omega_{1j}=0.5(a_j+a_{j+1})\Delta\omega=0.5(\sigma+1)\pi/a_j \tag{29}$$

式中：$\Delta\omega$ 为小波基函数 $\varphi(t)$Fourier 变换的半径，且有 $\Delta\omega>0$。

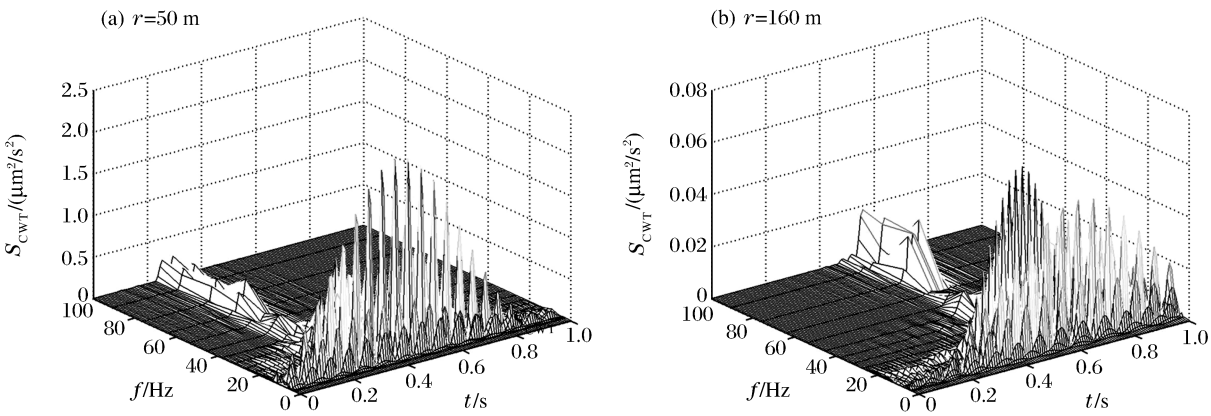

图 4 爆炸振动速度的时间能量密度分布

Fig. 4 Energy density distributions of blast vibration velocities varying with time

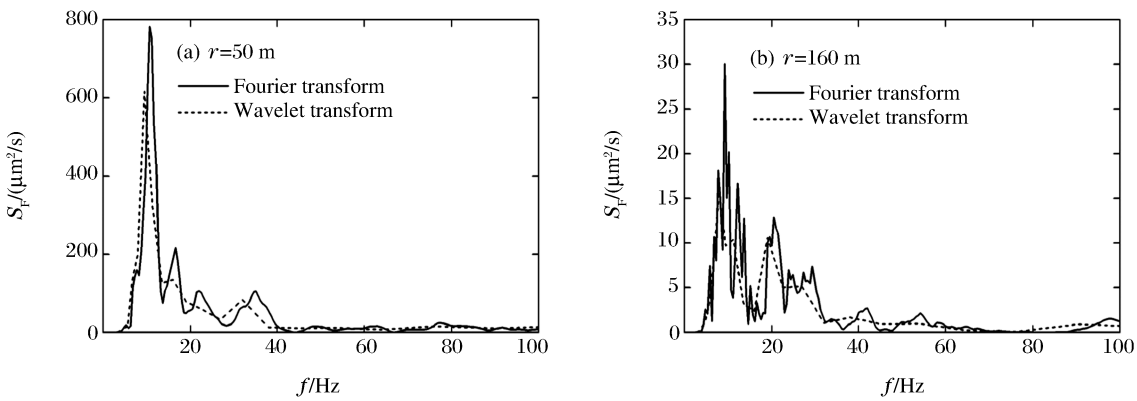

图 5 爆炸振动速度的功率谱密度分布规律

Fig. 5 Power spectral distributions of blast vibration velocities

所给频带振动分量的谐振函数可以通过一个慢变的谐振函数来进行调制，调制函数的频率为

$$\omega_{2j}=0.5(a_{j+1}-a_j)\Delta\omega=0.5(\sigma-1)\pi/a_j \tag{30}$$

同时，振动幅值的变化通过一个随时间变化的随机调幅过程 $A_j(b)$予以实现。于是，爆炸振动速度分量可以利用小波变换系数表示为

$$W_\varphi v(a_j,b)=A_j(b)\sin(\omega_{2j}b+\theta_{2j})\sin(\omega_{1j}b+\theta_{1j}) \tag{31}$$

式中：θ_{1j} 和 θ_{2j} 是区间[0，2π]上独立均匀分布的随机变量。

方程(31)所给出的描述关系首先由 B. Basu 等[7]在研究基于小波变换的结构随机地震响应分析中提出。显然，它也适用于爆炸振动问题，并为爆炸振动理论模型的建立提供了基础。事实上，在方程(31)等式两端作平方运算，然后，取数学期望，有

$$E\{[W_{\varphi}v(a_j,b)]^2\}=A_j^2(b)\sin^2(\omega_{2j}b)\sin^2(\omega_{1j}b) \tag{32}$$

根据实验测试结果易于获得爆炸振动的 $E\{[W_{\varphi}v(a_j,b)]^2\}$，利用这一方程便可以计算出不同尺度水平 j，即不同频率带上幅值过程 $A_j(b)$ 的值，由此确定了所分析爆炸振动分量的随机描述结果。

5　结　论

根据一种改进的 L-P 小波基函数，在连续小波变换理论基础上通过离散化处理给出了一种实现频率完全分割的时频特征提取方法，并建立了时频特征关系。

以 80 kg TNT 地面爆炸时地面垂向振动速度测试结果为对象，计算了不同尺度水平时的小波系数，给出了爆炸振动速度的时间能量密度分布函数和时频特征。在振动峰值速度到达时刻，爆炸振动的频率范围比较宽，而其他时刻，振动频率相对较为集中。与振动速度时间历史的对比发现，时频能量分布的峰值正好对应于爆炸振动速度的峰值到达时间。小波变换的频谱特征与 Fourier 变换结果的对比表明，二者具有良好的一致性。

虽然爆炸振动是一个宽带随机过程，但是可以通过小波变换把它们分解成为用小波系数描述的一系列窄带过程，由此建立爆炸振动激励随机演变的理论模型。

参考文献：

[1]　何军，于亚伦，梁文基. 爆破震动信号的小波分析[J]. 岩土工程学报，1998，20(1)：47－50.
HE Jun，YU Ya-lun，LIANG Wen-ji. Wavelet analysis of blasting vibration signal[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering，1998，20(1)：47－50.

[2]　林大超，施惠基，张奇，等. 爆炸地震效应的时频分析[J]. 爆炸与冲击，2003，23(1)：31－36.
LIN Da-chao，SHI Hui-ji，ZHANG Qi，et al. Time-frequency analysis of explosion seismic effects[J]. Explosion and Shock Waves，2003，23(1)：31－36.

[3]　林大超，施惠基，白春华，等. 基于小波变换的爆破振动时频特征分析[J]. 岩石力学与工程学报，2004，23(1)：101－106.
LIN Da-chao，SHI Hui-ji，BAI Chun-hua，et al. Time-frequency characteristic analysis of blasting vibration on wavelet transform[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering，2004，23(1)：101－106.

[4]　凌同华，李夕兵. 地下工程爆破振动信号能量分布特征的小波包分析[J]. 爆炸与冲击，2004，24(1)：63－68.
LING Tong-hua，LI Xi-bing. The features of energy distribution for blast vibration signals in underground engineering by wavelet packet analysis[J]. Explosion and Shock Waves，2004，24(1)：63－68.

[5]　黄文华，徐全军，沈蔚，等. 小波变换在判断爆炸地震危害中的应用[J]. 工程爆破，2001，7(1)：24－27.
HUANG Wen-hua，XU Quan-jun，SHEN Wei，et al. Application of wavelet transform in evaluation of blasting vibration damage[J]. Engineering Blasting，2001，7(1)：24－27.

[6]　林大超，施惠基，白春华，等. 爆破震动时频分布的小波包[J]. 工程爆破，2002，8(2)：1－5.
LIN Da-chao，SHI Hui-ji，BAI Chun-hua，et al. On time-frequency distribution of blasting vibration through wavelet packet transform[J]. Engineering Blasting，2002，8(2)：1－5.

[7]　Basu B，Gupta V K. Seismic response of SDOF systems by wavelet modeling of nonstationary process[J]. Journal of Engineering Mechanics，1998，124(10)：1142－1150.

Analysis of blast vibration characteristics by using discretization of continuous wavelet transform

LIN Da-chao[1*], BAI Chun-hua[2]

(1. *Department of Civil Engineering and Architecture*, *North China Institute of Science and Technology*, *Beijing* 101601, *China*;
2. *School of Mechatronic Engineering*, *Beijing Institute of Technology*, *Beijing* 100081, *China*)

Abstract: A non-overlapping frequency approach to analyze the time-frequency characteristics of vibration signals is presented by means of the discretized version of continuous wavelet transform based on a modified L-P (littlewood-paley) wavelet basis function, and it is used to study the time-frequency characteristics of blast vibrations in this work. Energy density distributions of vertical ground velocities for 80 kg TNT explosion on the ground surface varying with time show that at the moment of peak particle velocity arriving, the frequency range of blast vibrations is very wide, being the relatively narrow bands at the other moments, and the peak time-frequency energy just corresponds to the peak particle velocity arriving time of blast vibration. The power spectra of blast vibrations through wavelet transform method are agreement with those from Fourier transform. Additionally, the principle of modeling blast vibrations as random evolutionary processes by using the wavelet transform results is outlined.

Key words: mechanics of explosion; time-frequency; wavelet transform; blast vibration; random vibration

* Corresponding author: LIN Da-chao
E-mail address: lindachao@tsinghua.org.cn
Telephone: 010-62795894