

DOI: 10.11883/bzycj-2022-0318

基于分数阶模型的牡蛎壳动力学特性研究*

袁良柱¹, 陆建华¹, 苗春贺¹, 王鹏飞¹, 徐松林^{1,2}

(1. 中国科学技术大学中国科学院材料力学行为和 Design 重点实验室, 安徽 合肥 230027;
2. 中国地震局地震预测研究所高压物理与地震科技联合实验室, 北京 100036)

摘要: 贝壳、牡蛎等天然材料因其轻质高强的力学特性在材料设计等领域受到了广泛的关注, 但由于材料本身结构的复杂性, 对其力学行为的研究十分困难。近年来, 分数阶模型在研究材料的力学特性上取得了成功, 相比传统模型, 分数阶模型可以更好地表征复杂介质的应力或应变与时间的关系。因此, 本文从波传播理论出发, 以分数阶模型作为材料本构, 得到了复杂介质的波传播控制方程。通过 Laplace 变换得到了控制方程的解析解, 并通过 Laplace 数值逆变换分析了波的衰减对分数阶模型中参量的敏感性, 讨论了不同于材料弹性、黏性的材料“惯性”特性。接着, 基于解析解和多种实验测试信号, 给出了得到分数阶模型参数的拟合式子。以牡蛎材料作为研究对象, 利用 CO₂ 脉冲激光器进行小试样的冲击加载、应用两点激光干涉测速系统 (laser interferometer velocimetry system, VISAR) 对表面粒子的速度进行测量, 得到了 4 种密度下不同厚度的牡蛎壳试样的粒子速度时程曲线, 再结合上述理论方法分析得到了牡蛎壳试样的 Abel 模型和分数阶 Maxwell 模型的参数, 模型参数反映了牡蛎壳试样的细微观结构特征。结果发现: 牡蛎壳试样的密度越大, 即在细微观上具有砖泥结构的珍珠层的占比越高, 速度衰减越大, 试样的黏性越大; 这是由于 CO₂ 激光脉冲器发射的激光波长与牡蛎壳试样珍珠层的砖泥结构间的缝隙尺寸相近, 使得激光在冲击牡蛎壳试样中的珍珠层时发生较大的散射。

关键词: 分数阶导数; 本构模型; 牡蛎壳; 脉冲激光; 动力学特性

中图分类号: O347 国标学科代码: 13015 文献标志码: A

Dynamic properties of oyster shells based on a fractional-order model

YUAN Liangzhu¹, LU Jianhua¹, MIAO Chunhe¹, WANG Pengfei¹, XU Songlin^{1,2}

(1. CAS Key Laboratory for Mechanical Behavior and Design of Materials,
University of Science and Technology of China, Hefei 230027, Anhui, China;

2. United Laboratory of High-Pressure Physics and Earthquake Science, Institute of Earthquake Forecasting,
China Earthquake Administration, Beijing 100036, China)

Abstract: Natural materials such as shells and oysters have attracted extensive attention in the field of material design due to their lightweight and high-strength mechanical properties. However, due to the complex structure of shells, it is very difficult to study their mechanical behavior. In recent years, fractional-order models have been successful in studying the mechanical properties of materials. Compared with the traditional constitutive model, the fractional model can better characterize the relationship between the complex media's stress or strain and time. Therefore, based on wave propagation theory and by using the time-dependent fractional-order model as the material constitutive model, the complex medium is simplified to the uniform medium, and its governing equation is obtained by then. The analytic solution of the governing equation which is a function of

* 收稿日期: 2022-07-21; 修回日期: 2022-10-11

基金项目: 国家自然科学基金(11672286, 11872361); 中央高校基本科研业务费专项资金(WK2480000008); 中石油与中国科学院重大战略合作项目(2015A-4812); 高压物理与地震科技联合实验室室开放基金(2019HPPES01)

第一作者: 袁良柱(1998—), 男, 博士研究生, ylzustcedu@mail.ustc.edu.cn

通信作者: 徐松林(1971—), 男, 博士, 研究员, 博士生导师, slxu99@ustc.edu.cn

space coordinate x and Laplace variable s is obtained by the Laplace transform. It is hard to obtain the analytical solution of space coordinate x and time t directly through the inverse Laplace transform, so the numerical inverse Laplace transform is used to obtain the numerical solution of the governing equation in the time domain. The sensitivity of wave attenuation to parameters in the fractional model is analyzed. The inertial properties, which are different from the elastic and viscous properties of materials, are also discussed by analyzing the attenuation characteristics of stress waves when the order α is 0, 1.0, and 2.0 respectively. Then, based on the analytical solution of the governing equation and a variety of experimental test signals, a fitting formula is given to obtain the parameters of the fractional model. Oyster material with layered structure is taken as the research object. To obtain the local dynamic mechanical properties of oyster samples, the CO₂ pulse laser was used to carry out the impact loading of the small sample due to the high variability of the density distribution of oyster samples, and the two-point laser interferometer velocimetry system (VISAR) was used to measure the surface particle velocity. The particle velocity time history curve of the oyster sample with different densities and thicknesses was obtained. Combined with the above fitting formula, the parameters of the Abel model and Maxwell fractional differential model of oyster samples were obtained by fixing and unfixing the values of fractional order α , and the model parameters reflected the fine microstructure characteristics of oyster samples. The results show that the higher the density of the oyster sample is, the higher the proportion of nacre with brick and mortar structure in fine and micro, the greater the velocity attenuation, and the greater the viscosity of the oyster sample. The laser wavelength emitted by the CO₂ laser pulse is similar to the size of the gap between brick and mortar structures in the nacre of the oyster sample, so the laser has a large scattering when it impacts the nacre of the oyster sample, which causes the velocity attenuation. This study has a good reference significance for the study of the dynamic properties of meso-isomeric and macro-continuous complex media.

Keywords: fractional derivative; constitutive model; oyster shell; pulse laser; dynamic properties

黏弹性材料是生活中最常见的材料之一, 工业材料(塑料、橡胶、树脂、玻璃、陶瓷、混凝土等)、地质材料(岩石、土壤、沥青、石油等)、生物材料(肌肉、血液、骨骼等)常常同时具有弹性和黏性两种性质^[1]。

作为一种天然复合材料, 贝壳因其独特的强-弱层状结构表现出轻质高强的特性^[2]。这样的结构设计也被大量应用于材料设计中, 有大量工作仿照天然贝壳的结构构造, 制造出了具有良好的强度、断裂韧性和冲击性能的人造仿生材料^[3-5]。从结构成分上来说, 贝壳由 1%~5% 的蛋白质和 95%~99% 的矿物组成, 其中蛋白质的弹性模量和强度均不高(弹性模量在 50~100 MPa 之间, 强度仅有 20 MPa), 贝壳的矿物成分 CaCO₃ 的强度也不高(弹性模量在 50~100 GPa 之间, 而强度仅有 30 MPa)^[2]。但因为贝壳内部的珍珠层具有独特的多尺度、多级次的砖泥结构^[5], 使贝壳本身的强度能达到 100~300 MPa 之间^[2]。不仅如此, 贝壳材料的动态力学特性同样优异。Huang 等^[6]发现贝壳珍珠层在高应变率(10^3 s^{-1})下的强度(500 MPa)比低应变率(10^{-3} s^{-1})下的强度(200 MPa)要高得多。贝壳独特的结构特点以及其优异的力学特性引起了广泛的研究兴趣^[2,6]。

贝壳因其独特的结构特征表现出相当复杂的力学特性, 这种复杂材料含有大量的多尺度细微观结构, 也使得材料中的应力波产生弥散和衰减现象^[7-8], 体现出了一定的黏弹性特性^[2]。复杂材料中应力波传播有较多的研究成果^[9-10], 其特性均与复杂介质的细微观结构相关。Huang 等^[11]研究了颗粒体系介质中分形维数与应力/破碎程度的关系, 以及对局部波动效应的影响。徐松林等^[7]、谭子翰等^[8]基于波动方程的格林函数解, 结合边界积分的方法研究了椭圆形孔洞、裂纹等细微观缺陷对波传播规律的影响。Ting 等^[12]研究了周期性分层介质的波传播规律。张鸣^[13]基于波传播理论, 推导了梯度密度介质的波传播方程, 李毅等^[14-15]在此基础上, 推导了梯度密度和层状介质的波传播方程, 并以此分析了牡蛎壳试样的波传播规律, 发现牡蛎壳试样的黏弹性会随着密度的变化而变化。这些研究所用的本构模型均是整数阶模型, 在材料细微观结构的研究方面具有一定限制, 无法较好反映复杂介质的细微观结构对波传播的影响规律。

传统模型如 Maxwell 模型、Kelvin 模型所预测的材料松弛和蠕变过程, 应力和应变满足时间的自然指数形式^[16]。然而, 大量的实验发现, 多数黏弹性材料的松弛和蠕变过程, 应力和应变往往表现为时间的幂函数形式^[17]。不同于传统模型, 分数阶模型的应力和应变满足时间的幂函数形式, 如分数阶 Kelvin 模型在蠕变下的应力应变表达式为多个幂函数之和^[16]。也有学者在传统整数阶模型的基础上, 通过引入多个导数项和材料参数来表征变形或应力的历史或演化, 使得本构模型和实验能较好地贴合^[18-23], 但模型也变得更加复杂了。而与传统模型相比, 分数阶模型参量少, 并且能够很好地涵盖传统本构模型。例如当 Abel 分数阶模型($\sigma(t) \propto d^\alpha \varepsilon(t)/dt^\alpha$)中的阶数 $\alpha=0$ 时, 模型就是弹簧元件; 当 $\alpha=1.0$ 时, 模型则变为牛顿黏壶元件^[16]。分数阶本构关系也能更接近黏弹性的流变特性^[24-25]。寇磊^[26]通过矩形板蠕变的算例表明, 分数阶黏弹性模型比经典黏弹性模型的适应性要好。尹耀得等^[27]应用分数阶 Kelvin-Voigt 模型建立了考虑记忆特征时间长度的黏弹性本构关系, 对 8 组不同拉伸速率下的丙烯酸弹性体单轴拉伸实验数据进行参数拟合, 得到了具有高拟合决定系数的材料参数。Zhao 等^[28]针对介电弹性体的黏弹性问题, 建立了一种基于分数阶 Kelvin-Voigt 黏弹性模型的三维本构, 可被用来预测材料在自由振荡和激励振荡下的蠕变行为。牡蛎壳材料由于其内部珍珠层和粉末层两种成分的巨大差异, 使得不同密度的牡蛎壳材料表现出较大的力学性能差异, 并且由于其珍珠层-粉末层这种软硬交替的结构使得牡蛎壳材料表现出一定的黏弹性特性^[15]。因此使用简单的整数阶模型并不能很好地表征其黏弹性特性, 而分数阶黏弹性模型在复杂材料的动力学研究工作中已经取得了众多成功^[29]。

本文中, 首先基于时间分数阶的微积分定义, 分别以 Abel 模型和分数阶 Maxwell 模型作为材料的本构, 结合一维波传播理论得到材料的控制方程; 然后利用 Laplace 变换得到应力与位置坐标 x 、Laplace 变换参量 s 的关系式, 并通过数值 Laplace 逆变换的方法, 研究 Abel 模型和分数阶 Maxwell 模型中各个参数对波衰减的影响; 最后, 基于 Abel 模型和分数阶 Maxwell 模型, 利用 CO₂ 脉冲激光加载技术和激光干涉测速装置, 从分数阶模型参数的角度定量地分析相同加载条件下牡蛎壳试样的动力学特性与试样密度/珍珠层占比的关系。

1 牡蛎材料与 CO₂ 脉冲激光加载技术

牡蛎壳材料具有与贝壳相似的砖泥结构特征和力学性质, 由珍珠层和粉末层组成, 其中的 CaCO₃ 含量在 95% 以上^[30]。但是, 牡蛎壳结构复杂, 不同部位的珍珠层和粉末层含量和厚度差异大。粉末层具有多孔的细观结构特性, 从放大的粉末层结构剖面中可以看到排列不规则的片状和丝状的方解石成分; 珍珠层结构相对比较光滑, 具有平整的纹理, 放大的珍珠层结构剖面可以看到排列整齐的方解石柱。其中, 珍珠母内单个文石片的平均厚度约为 0.45 μm , 各文石片层边沿之间间距平均约为 2.35 μm , 具有典型的砖泥结构特征^[31]。本文中所选材料为东海出产的牡蛎壳(图 1(a))。使用带有空心钻孔的电钻在牡蛎上钻下圆柱形试样, 然后分别采用电磨机、砂纸逐次进行打磨。制备得到圆片形牡蛎壳试样, 直径为 (13.0 \pm 0.5) mm, 厚度为 0.4~1.0 mm(图 1(a))。图 1(b) 为对应的牡蛎壳试样纵剖面的扫描电镜(scanning electron microscope, SEM)照片。

由于制备的牡蛎壳试样密度分布变异性很大, 采用常规 SHPB 装置中直径较大的入射杆进行实验(即便采用 4~6 mm 直径的入射杆)不能很好地反映牡蛎壳试样结构的局部动态力学性能。因此, 本文中应用 CO₂ 脉冲激光加载技术, 将其光斑聚集到直径 1 mm, 对牡蛎壳试样进行加载, 结合激光干涉测速(laser interferometer velocimetry system, VISAR)装置进行自由表面粒子速度波形的测量。

图 2 为 CO₂ 脉冲激光对贝壳试样进行冲击加载及速度信号采集的示意图。实验中, 在试样冲击面放置光电传感器作为实验信号的触发源, 在试样的另一面放置 VISAR 系统中的光纤探头(光纤探头与试样贴近但不接触), VISAR 系统中的光纤探头可以发射测速激光并收集试样表面反射回的激光信号, 反射光信号通过与 VISAR 系统相连的示波器采集, 利用反射光信号, 就可以分析得到试样表面的粒子速度。实验时, 由 CO₂ 脉冲激光器发射一束激光, 经凸透镜会聚后冲击牡蛎壳试样。当激光冲击试样时, 试样前表面的光电传感器触发信号, 光纤探头连接的 VISAR 系统开始采集牡蛎壳试样表面的信号。通

过改变透镜与试样之间的距离, 可以调整激光光斑的大小与能量密度, 以此来调整冲击加载的强弱。本文中所有实验试样与透镜的距离均相同, 并且激光冲击试样的区域也相同, 以此来达到控制相同密度试样相同加载的条件。

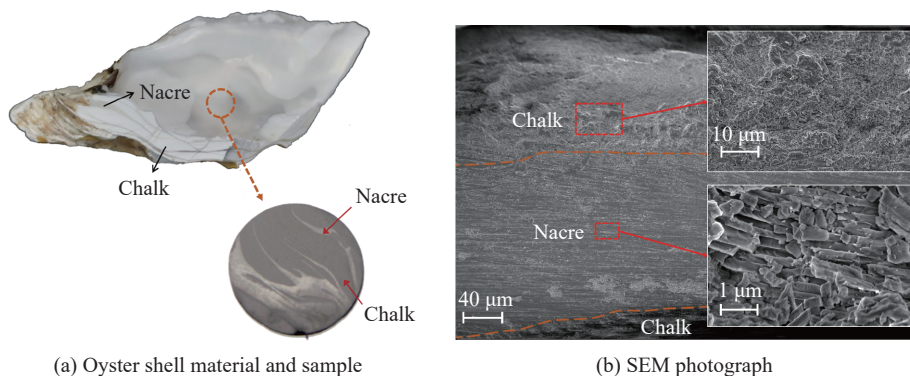


图 1 牡蛎壳材料、圆形实验试样、试样纵剖面电镜照片与局部放大

Fig. 1 Oyster shell material, circular sample, longitudinal section electron microscopy (SEM) and local magnification

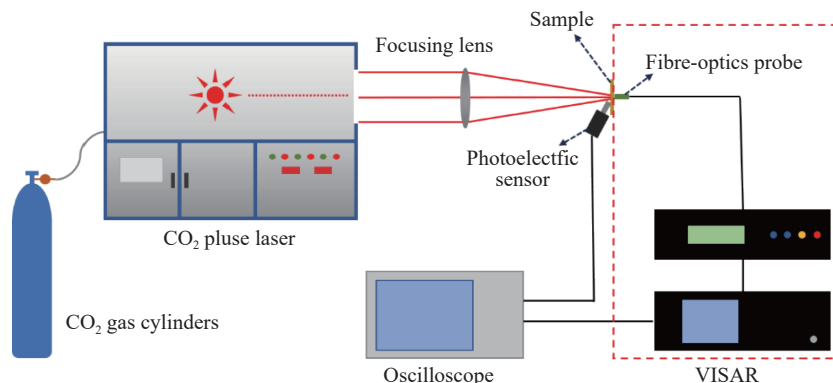


图 2 CO₂ 脉冲加载与激光干涉测速系统 (VISAR)

Fig. 2 CO₂ pulse loading and laser interferometer velocimetry system (VISAR)

由于牡蛎壳试样的密度可以反映所含珍珠层的占比, 取密度为 0.5、0.7、1.2 和 1.4 g/cm³ 共 4 种牡蛎壳试样进行实验, 以此来探讨不同珍珠层占比对牡蛎壳试样黏弹性的影响。

由于牡蛎贝壳类材料内部的砖泥结构使其表现出微观异构、宏观连续的特征, 传统的整数阶微分本构模型不能很好地描述它们的力学行为, 而时间分数阶导数可以更加准确地体现复杂材料的力学行为^[16]。因此, 下面将结合分数阶导数的定义, 推导得到应用分数阶模型的动力学控制方程及其应力解, 基于此, 结合激光冲击实验来研究牡蛎材料的动力学特性。

2 时间分数阶本构模型及动力学控制方程

2.1 时间分数阶微积分与黏弹性模型

从分数阶导数被提出以来, 不断有学者从不同的角度出发提出几种分数阶微积分定义。其中, Riemann-Liouville、Caputo、Grünwald-Letnikov 和 Riesz 定义在基础数学和工程应用中比较常用。Grünwald-Letnikov 定义主要用于数值计算中差分格式的计算; Riesz 定义是关于空间分数阶的定义。Riemann-Liouville 定义和 Caputo 定义均是基于多重积分思想的定义, Riemann-Liouville 型分数阶导数在数学理论分析中较常用, 但具有超奇异性; 而 Caputo 定义具有弱奇异性, 更适合地球物理建模。因此本文将采用 Caputo 定义的时间分数阶微分定义来描述黏弹性材料的应力应变行为。

对于任意实数 $\alpha > 0$, Riemann-Liouville 分数阶积分定义^[16,32]:

$$I_q^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_q^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\alpha}} \quad t > q, \alpha > 0 \quad (1)$$

式中: I_q^α 为分数阶积分符号, 表示对函数进行 α 重积分, q 为积分下限; $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-t} t^{\alpha-1} dt$ 为伽马函数, t 表示时间。

在式 (1) 的基础上, Riemann-Liouville 型分数阶微分定义为:

$${}^{RL}D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n I_q^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_q^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad n = |\alpha| + 1, n-1 \leq \alpha < n, t > q \quad (2)$$

式中: ${}^{RL}D_t^\alpha$ 为 Riemann-Liouville 型分数阶微分符号, 表示对函数进行 α 阶微分, RL 表示微分类型为 Riemann-Liouville 型, n 为整数。

Riemann-Liouville 型微分定义是先求积分再求微分, 与此相反, Caputo 型微分定义是先求微分再求积分, 其表达式^[16]为:

$${}^C D_t^\alpha f(t) = I_q^{n-\alpha} f^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_q^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} \quad n = |\alpha| + 1, n-1 \leq \alpha < n, t > q \quad (3)$$

式中: ${}^C D_t^\alpha$ 为 Caputo 型分数阶微分符号, C 表示微分类型为 Caputo 型。

将分数阶时间导数应用于分析黏弹性材料的力学行为, 目前主要是将传统模型中的牛顿黏壶替换为 Abel 黏壶。Abel 黏壶模型示意图如图 3(a) 所示, 本构关系为:

$$\sigma(t) = \eta \frac{d^\alpha \varepsilon(t)}{dt^\alpha} \quad (4)$$

式中: $\sigma(t)$ 为模型整体受到的应力; $\varepsilon(t)$ 为模型整体的应变; η 为 Abel 黏壶的黏性系数, 其量纲随着分数阶阶数 α 的变化而变化, 单位可写为 $\text{Pa} \cdot \text{s}^\alpha$ ^[28]。可以发现, 当 $\alpha=0$, Abel 黏壶变为弹簧元件, 代表弹性固体; 当 $\alpha=1.0$ 时, Abel 黏壶变为牛顿黏壶, 代表牛顿流体。

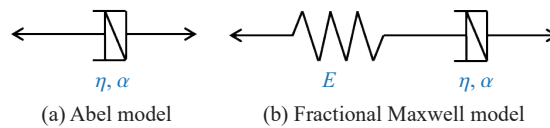


图 3 几种分数阶本构模型

Fig. 3 Several fractional differential constitutive models

分数阶 Maxwell 模型由 1 个弹簧元件和 1 个 Abel 黏壶串联而成。模型示意图如图 3(b) 所示, 本构关系为:

$$\frac{d^\alpha \sigma}{dt^\alpha} + \frac{E}{\eta} \sigma = E \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} \quad (5)$$

式中: E 为模型中弹簧元件的弹性模量。

特别地, 当初始条件满足 $\sigma(t)|_{t=0}=0$ 、 $\varepsilon(t)|_{t=0}=0$ 时, 则 Abel 黏壶和分数阶 Maxwell 模型的 Laplace 变换分别为:

$$\bar{\sigma} = \eta s^\alpha \bar{\varepsilon} \quad (6a)$$

$$s^\alpha \bar{\sigma} + \frac{E}{\eta} \bar{\sigma} = E s^\alpha \bar{\varepsilon} \quad (6b)$$

式中: s 为 Laplace 变换因子, $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\varepsilon}$ 分别为 σ 、 ε 的 Laplace 变换。

2.2 基于分数阶本构模型的动力学控制方程求解

对于一个半无限长的复杂介质(内部含有孔洞、间隙、界面等细微观结构), 应用时间分数阶本构模型(以 Abel 黏壶为例), 则一维应变下的控制方程组为:

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t} \\ \sigma = \eta \frac{d^\alpha \varepsilon}{dt^\alpha} \end{cases} \quad (7)$$

式中: σ 、 ε 、 v 分别为单元体的应力、应变和速度, x 为 Euler 坐标系下的坐标, t 为时间, ρ 为材料密度, α 、 η 为 Abel 黏壶的分数阶阶数和黏性系数。

当初始条件满足 $\sigma(t)|_{t=0}=0$ 、 $\varepsilon(t)|_{t=0}=0$ 时, 应用式 (6a), 并对式 (7) 进行 Laplace 变换, 整理得到:

$$\frac{\partial^2 \bar{\sigma}}{\partial x^2} - \frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha} \bar{\sigma} = 0 \quad (8)$$

可以发现, 式 (8) 满足 Euler 方程的形式, 求解得到其解析解为:

$$\bar{\sigma}(x, s) = A(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} x} \quad (9)$$

式中: $A(s)$ 为经过 Laplace 变换的积分常量。

同理, 可以得到分数阶 Maxwell 模型下控制方程的应力解为:

$$\bar{\sigma}(x, s) = B(s) e^{-\sqrt{\frac{E}{E} s^2 + \frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} x} \quad (10)$$

式中: E 为模型中弹簧元件的弹性模量, $B(s)$ 为经过 Laplace 变换的积分常量。

对于式 (9)~(10) 中的 Laplace 积分常量 $A(s)$ 、 $B(s)$, 可以通过 $x=0$ 处的边界条件得到。以式 (9) 为例, 假定一个函数 $p(t)$ 作为 $x=0$ 处的边界条件, 通过 Laplace 变换将 $p(t)$ 转变为 $P(s)$, 最后代入式 (9) 得到:

$$P(s) = \bar{\sigma}(0, s) = A(s) \quad (11)$$

将式 (11) 代回式 (9), 得到:

$$\bar{\sigma}(x, s) = P(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} x} \quad (12)$$

同理, 利用边界条件, 由式 (10) 也可以得到:

$$\bar{\sigma}(x, s) = P(s) e^{-\sqrt{\frac{E}{E} s^2 + \frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} x} \quad (13)$$

为简化问题, 以图 4 所示的单个半脉宽正弦函数作为 $x=0$ 处的边界条件, 其相应的 Laplace 变换式为:

$$P(s) = L\{A_0 \sin(w_0 t) u(t) + A_0 \sin[w_0(t - \pi/w_0)] u(t - \pi/w_0)\} = \frac{A_0 w_0}{s^2 + w_0^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi}{w_0} s}\right) \quad (14)$$

式中: A_0 和 w_0 分别为正弦函数的幅值和频率, $u(t)$ 为单位阶跃函数, 图中 $T=2\pi/w_0$ 为正弦函数的周期。

式 (12)~(13) 均是位置坐标 x 和 Laplace 变换参量 s 的函数, 需要进行 Laplace 逆变换才能得到关于位置 x 和时间 t 的应力解。Laplace 逆变换的公式为: $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\beta-j\infty}^{\beta+j\infty} F(s) e^{st} ds, t > 0$ 。然而, 一些形式复杂的象函数 $F(s)$ 无法通过上述积分求出解析的原函数 $f(t)$ 。因此, 采用数值 Laplace 逆变换得到式 (12)~(13) 在时域 t 下的曲线。数值 Laplace 逆变换的思路是: 将积分区间进行数值离散, 再将离散后积分区间内的函数视为常量, 从而得到原函数的数值。

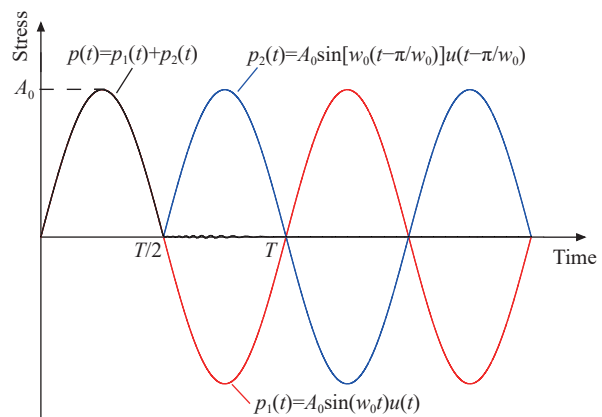


图 4 单个半脉宽正弦函数
Fig. 4 Single half pulse width sine function

同样, 以 Abel 黏壶模型为例。假定材料密度 ρ 为 $1\,000\text{ kg/m}^3$, 分数阶导数阶数 α 为 0.5 , η 为 $1\text{ MPa}\cdot\text{s}^{0.5}$ 。若输入正弦信号的幅值和脉宽分别为 100 MPa 和 $100\text{ }\mu\text{s}$, 可得到波传播到各个位置处的波形, 如图 5(a) 所示。可以发现, 随着传播距离的增大, 波的幅值逐渐减小, 体现出了分数阶模型的黏弹性特性。从图 5(b) 可以看出, 正弦波传播到 $x=20\text{ mm}$ 处的波形脉宽远远大于 $100\text{ }\mu\text{s}$, 相比加载的时间, 波形卸载的时间要远比入射波长, 这同样体现了分数阶模型的黏弹性特性。

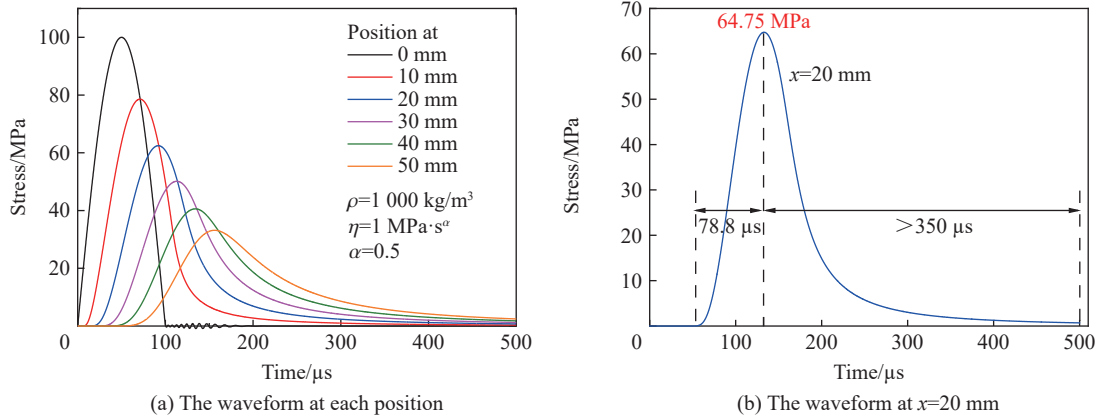


图 5 正弦波在 Abel 黏壶模型介质的衰减

Fig. 5 Attenuation of a single half pulse width sine wave in Abel model media

2.3 分数阶模型参数敏感性分析

对于 Abel 黏壶而言, 当 $\alpha=0$ 时, $\sigma=\eta\varepsilon=\eta\Delta l/l$, 此时应力与介质的变形量 Δl 有关, 反映出模型的弹性特性; 当 $\alpha=1.0$ 时, $\sigma=\eta d\varepsilon/dt=\eta v/l$, 此时应力与介质的速度 v 有关, 反映出模型的黏性特性; 当 $\alpha=2.0$ 时, $\sigma=\eta d^2\varepsilon/dt^2=\eta a/l$, 此时应力与介质的加速度 a 有关, 可以认为模型此时反映的是介质的惯性特性。若介质是完全弹性的 ($\alpha=0$), 系数 η 为弹性模量, 此时波传播不会产生衰减; 若介质是黏性的 ($\alpha=1.0$), 系数 η 为黏性系数, 此时波传播会产生衰减。那么当介质是惯性 ($\alpha=2.0$) 的时, 其波传播同弹性介质和黏性介质会有什么区别?

当 α 分别为 0 、 1.0 和 2.0 时, 式 (12) 变为:

$$\bar{\sigma}(x, s) = P(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} s^2 x} = P(s) e^{-s \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} x} \quad \alpha = 0 \quad (15a)$$

$$\bar{\sigma}(x, s) = P(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} s^3 x} = P(s) e^{-\sqrt{s} \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} x} \quad \alpha = 1.0 \quad (15b)$$

$$\bar{\sigma}(x, s) = P(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} s x} \quad \alpha = 2.0 \quad (15c)$$

对于 $\alpha=0$, 根据 Laplace 变换的延迟性质^[33]: $L\{f(t-\Delta t)\}=F(s) e^{-s\Delta t}$, $\Delta t = \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} x$ 即为波传播到 x 处所用的时间, 即式 (15a) 中 $e^{-s \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} x}$ 的 Laplace 逆变换反映了波的传播速度。对于 $\alpha=2.0$, 式 (15c) 的 Laplace 逆变换为 $\sigma(x, t) = p(t) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta}} x}$, 即波传播到 x 处只产生幅值衰减, 不会变化波形, 并且所用时间为 0 。而对于 $\alpha=1.0$, 式 (15b) 中 $e^{-\sqrt{s} \sqrt{\frac{\rho}{\eta}} x}$ 的 Laplace 逆变换则不仅反映了波的传播速度, 也反映了波的衰减特性。

以图 4 所示的正弦波为输入信号, 分别计算了阶数 α 为 1.0 和 2.0 时, 波传播在各个系数 η 下的波形, 如图 6(a) 所示。当 $\alpha=1.0$ 、 $\eta=1\text{ kPa}\cdot\text{s}$ 时, 波产生了衰减, 并且波的脉宽变得很长, 表现出明显的黏弹性特征。随着系数 η 的上升, 波的脉宽逐渐接近输入信号的脉宽 ($100\text{ }\mu\text{s}$), 并且波的衰减也很小, 说明介质黏性 ($\alpha=1.0$) 对波的衰减和波长均会产生影响。从图 6(b) 可以看出, 当 $\alpha=2.0$ 、 $\eta=1\text{ kPa}\cdot\text{s}^2$ 或 $\eta=1\text{ MPa}\cdot\text{s}^2$ 时, 波也会产生衰减, 但衰减的程度很小, 波形和 $\alpha=1.0$ 、 $\eta=1\text{ MPa}\cdot\text{s}$ 的形状相似, 说明这两种情况对波衰

减的作用相近。虽然当 $\alpha=2.0$ 、 $\eta=0.1 \text{ Pa}\cdot\text{s}^2$ 时, 得到的波形的幅值与 $\alpha=1.0$ 、 $\eta=1 \text{ kPa}\cdot\text{s}$ 的相近, 但脉宽或者说波长相差甚大, 十分接近输入信号的脉宽($100 \mu\text{s}$)。这体现了惯性特性与黏性特性的不同之处, 即介质的黏性会使波的幅值和波长均改变, 而惯性特性仅仅改变波的幅值。

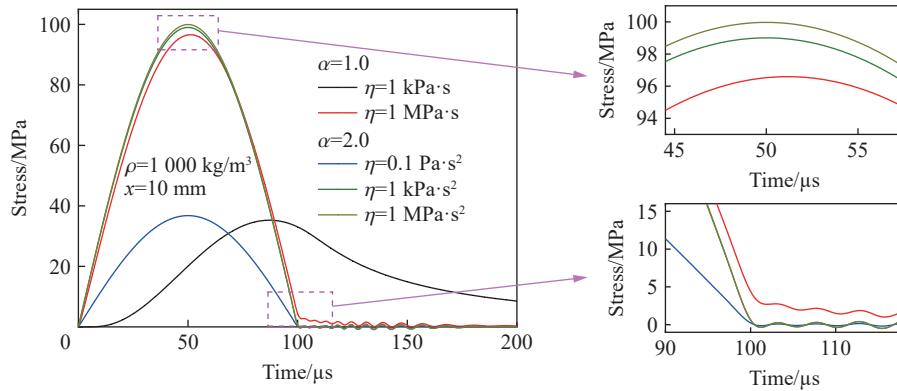


图 6 当 α 分别为 1.0 和 2.0 时的波传播特性

Fig. 6 The property of wave propagation when the order α is 1.0 and 2.0, respectively

为了进一步探究阶数 α 和系数 η 的取值对波传播的影响, 仍以图 4 所示的正弦波为输入信号, 分别以 Abel 模型和分数阶 Maxwell 模型作为材料本构, 讨论其中的参数对波传播幅值衰减的影响。

假定材料密度 ρ 为 1000 kg/m^3 , α 从 0 变化到 1.4, 设 η 为 1、2 和 3 $\text{MPa}\cdot\text{s}^\alpha$ 等 3 种情况。若输入信号的幅值和脉宽分别为 100 MPa 和 $100 \mu\text{s}$, 可得到其传播至 $x=10 \text{ mm}$ 处的应力波幅值与 α 、 η 之间的关系, 如图 7(a) 所示。

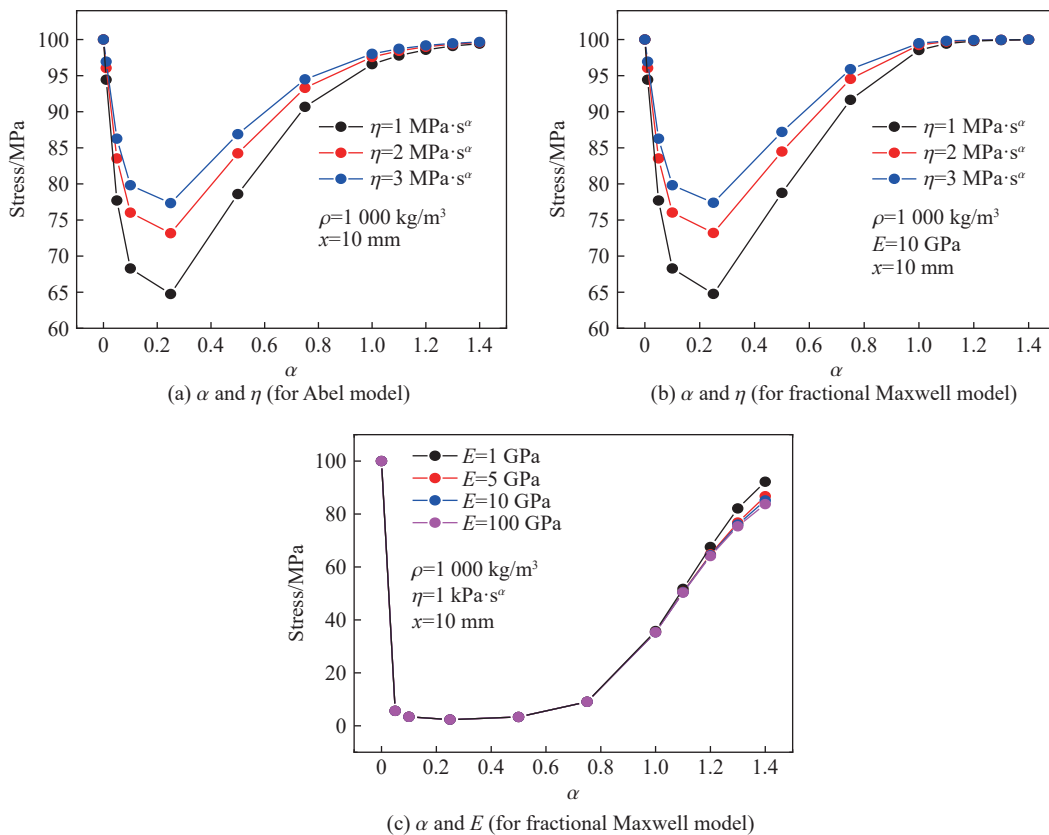


图 7 参数 α 、 η 和 E 对幅值衰减的影响

Fig. 7 Influence of parameters α , η and E on amplitude attenuation

从图 7(a)可以看出, 在 η 不变的情况下, 应力波的幅值衰减程度随着阶数 α 的增大呈现出非单调的变化, α 存在一个中间值, 能使波的衰减达到最大。此外, 当阶数 α 不变时, η 越大, 波的幅值衰减程度越小。

与 Abel 黏壶模型相比, 分数阶 Maxwell 模型更加多样化, 与控制方程联立得到的应力解形式也更加复杂。分数阶 Maxwell 模型含有 3 个参数: 弹簧弹性模量 E 、黏性系数 η 和分数阶阶数 α 。同样设定材料密度 ρ 为 $1\ 000\ \text{kg/m}^3$, α 从 0 变到 1.4; 在 E 值 ($10\ \text{GPa}$) 不变时, 取 η 为 1、2 和 3 $\text{MPa}\cdot\text{s}^\alpha$ 等 3 种值; 在 η 值 ($1\ \text{kPa}\cdot\text{s}^\alpha$) 相对较小时, 取 E 为 1、5、10 和 100 GPa 。若输入正弦波信号的幅值和脉宽分别为 100 MPa 和 100 μs , 可得到传播至 $x=10\ \text{mm}$ 处的应力波幅值与 α 之间的关系如图 7(b) 和图 7(c) 所示。

从图 7(b)可以看出, 对于分数阶 Maxwell 模型, 阶数 α 和黏性系数 η 对幅值衰减的影响同 Abel 黏壶相同。从图 7(c)可以看出, 在黏性系数 η 相对较小时, E 对波衰减的影响很小。因此, 可以认为, 应力波的衰减主要由分数阶 Maxwell 模型中的 Abel 黏壶控制。

3 冲击下牡蛎材料的黏弹性特性

3.1 牡蛎材料在激光冲击下的力学特性

图 8 所示为不同密度、不同厚度的牡蛎壳试样在脉冲激光冲击下的速度时间信号, 从图中可以看出, 输出信号的幅值随着试样厚度的增大而变小, 这反映了牡蛎壳试样的黏弹性特性。比较特别的是: 通过对不同密度牡蛎壳试样的输出信号进行比较, 发现试样密度越大, 其粒子速度的幅值衰减得也越大。这与一般认为的密度越大、材料黏弹性越小相反。其原因在于: CO_2 激光脉冲器发射的激光波长约为 $1.064\ \mu\text{m}$, 产生的冲击脉冲宽度为几个微米, 这与珍珠层中文石片边沿的平均间距 ($2.35\ \mu\text{m}$) 比较接

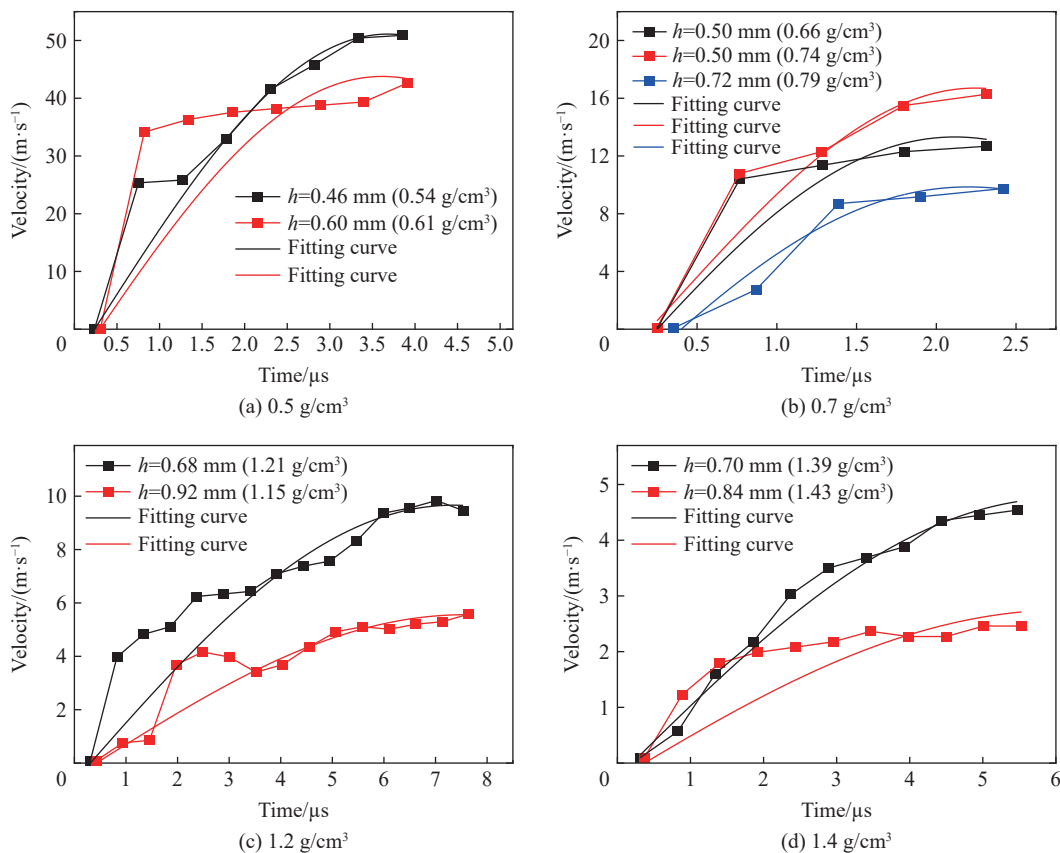


图 8 各个密度下不同厚度牡蛎试样的速度信号及拟合曲线

Fig. 8 Velocity signals and fitting curves of oyster samples with different thicknesses and densities

近, 即与砖泥结构间的缝隙尺寸相近, 使得激光脉冲在珍珠层中发生较大的散射, 产生更大的能量损耗。此外, 由于牡蛎材料具有较复杂的层状结构的特征, 局部存在一定的交互层错结构。当存在这种交互层错结构时, 由激光脉冲激发的短脉冲波就会在局部产生反射波和透射波, 这些复杂波系的相互作用, 会使速度信号产生局部的极值。

3.2 牡蛎材料的分数阶模型参数拟合方法

由于激光干涉测速系统只能测得牡蛎壳试样背面的速度信号(即输出信号)。对于冲击信号(即输入信号), 无法得到其具体数值。因此下面将基于输出信号, 推导在 CO₂ 激光加载实验中获取牡蛎壳试样分数阶黏弹性参数的方法。

以 Abel 黏壶模型为例, 根据 $\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial v}{\partial t}$ 的 Laplace 变换 $\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} = \rho s \bar{v}$ 及式 (12), 可以得到:

$$\bar{v}(x, s) = \frac{1}{s\rho} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial x} = \frac{1}{s\rho} A(s) \left(-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} x} \quad (16)$$

式中: $\bar{v}(x, s)$ 为速度 $v(x, t)$ 的 Laplace 变换。

当 $x=0$ 时, 即输入边界条件满足:

$$\bar{v}(0, s) = \frac{1}{s\rho} A(s) \left(-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} \right) = \bar{v}_{\text{int}}(s) \quad (17)$$

式中: $\bar{v}_{\text{int}}(s)$ 为输入信号 $v_{\text{int}}(t)$ 的 Laplace 变换。

假定在相同的冲击信号下, 对于相同密度的牡蛎壳试样, 其分数阶黏弹性系数相同, 并且输入信号也相同。则对于相同密度 ρ 、不同厚度 (h_1, h_2, \dots, h_n) 的一系列实验来说, 其输出信号端满足:

$$\begin{cases} \bar{v}(h_1, s) = \frac{1}{s\rho} A(s) \left(-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_1} = \bar{v}_{\text{int}}(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_1} = \bar{v}_{\text{out},1}(s) \\ \bar{v}(h_2, s) = \frac{1}{s\rho} A(s) \left(-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_2} = \bar{v}_{\text{int}}(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_2} = \bar{v}_{\text{out},2}(s) \\ \vdots \\ \bar{v}(h_n, s) = \frac{1}{s\rho} A(s) \left(-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} \right) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_n} = \bar{v}_{\text{int}}(s) e^{-\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_n} = \bar{v}_{\text{out},n}(s) \end{cases} \quad (18)$$

式中: $\bar{v}_{\text{out},1}(s)$ 、 $\bar{v}_{\text{out},2}(s)$ 、 \dots 、 $\bar{v}_{\text{out},n}(s)$ 分别为厚度 h_1 、 h_2 、 \dots 、 h_n 的试样的输出速度信号拟合函数的 Laplace 变换。整理式 (18) 可得:

$$\bar{v}_{\text{int}}(s) = \bar{v}_{\text{out},1}(s) e^{\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_1} = \bar{v}_{\text{out},2}(s) e^{\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_2} = \dots = \bar{v}_{\text{out},n}(s) e^{\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_n} \quad (19)$$

则对于同一密度下不同试样厚度的任意两组实验, 即式 (19) 中的第 k 和 k' 个信号而言, 满足:

$$\bar{v}_{\text{out},k}(s) e^{\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_k} = \bar{v}_{\text{out},k'}(s) e^{\sqrt{\frac{\rho}{\eta} s^{2-\alpha}} h_{k'}} \quad (20)$$

即有:

$$\frac{\rho}{\eta} \frac{1}{s^{2+\alpha}} = \frac{1}{s^4 (h_k - h_{k'})^2} \left[\ln \left(\frac{\bar{v}_{\text{out},k'}(s)}{\bar{v}_{\text{out},k}(s)} \right) \right]^2 \quad (21)$$

利用 Laplace 变换式 $L\{t^m\} = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}}$ [33], 对式 (21) 进行 Laplace 逆变换可得到:

$$\frac{\rho}{\eta} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4 (h_k - h_{k'})^2} \left[\ln \left(\frac{\bar{v}_{\text{out},k'}(s)}{\bar{v}_{\text{out},k}(s)} \right) \right]^2 \right\} \quad (22)$$

利用式 (22) 等号右边和拟合得到的相同密度、不同厚度牡蛎壳试样的速度时间曲线, 用数值 Laplace 进行计算得到一组数据后, 再用式 (22) 等式左边(即 $\rho t^{\alpha+1}/[\eta \Gamma(\alpha+2)]$)对其进行拟合可得到对应密度牡蛎壳试样的 Abel 黏壶模型参数 α 和 η 。

同理, 可以得到分数阶 Maxwell 模型参数的拟合式为:

$$\frac{\rho}{E}t + \frac{\rho}{\eta} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4(h_k - h_{k'})^2} \left[\ln \left(\frac{\bar{v}_{out,k'}(s)}{\bar{v}_{out,k}(s)} \right) \right]^2 \right\} \quad (23)$$

与获取 Abel 黏壶模型参数的过程相同, 同样可以得到分数阶 Maxwell 模型参数 α 、 η 和 E 。此外, 拟合得到的参数中, 分数阶阶数 $0 < \alpha < 2.0$, 其中的整数 0、1.0 和 2.0 分别对应了材料的弹性、黏性和惯性。黏性系数 η 和弹性模量 E 为大于 0 的实数, 弹性模量 E 应与材料的杨氏模量量级相当。

值得注意的是, 由于式 (22)~(23) 中含有 $1/(h_k - h_{k'})^2$ 项, 因此需要选择相近密度下厚度不同的牡蛎壳试样的速度信号进行分数阶模型参数的拟合。并且为了统一实验信号的拟合条件, 设定信号范围从 0 开始, 至峰值点结束, 且同一密度的牡蛎壳试样的实验信号的时间范围均取一致。图 8 所示的不同密度、不同厚度牡蛎壳试样的输出速度信号, 其形状类似正弦形, 因此, 类比式 (12)~(13) 的结果, 在单个正弦函数的基础上乘上时间衰减项 $e^{b_k t}$, 即:

$$v_{out,k}(t) = e^{b_k t} \sigma_{m,k} \left\{ \sin(w_k t) u(t) + \sin \left[w_k \left(t - \frac{\pi}{w_k} \right) \right] u \left(t - \frac{\pi}{w_k} \right) \right\} \quad (24)$$

式 (24) 的 Laplace 变换为:

$$\bar{v}_{out,k}(s) = \frac{\sigma_{m,k} w_k}{(s - b_k)^2 + w_k^2} \left[1 + e^{-\frac{\pi}{w_k}(s - b_k)} \right] \quad (25)$$

式中: $\sigma_{m,k}$ 、 w_k 分别为第 k 个输出信号的正弦函数幅值和频率, b_k 为第 k 个输出信号的时间衰减指数。则式 (22)~(23) 可写为:

$$\frac{\rho}{\eta} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4(h_k - h_{k'})^2} \left[\ln \left(\frac{\sigma_{m,k'} w_{k'} (s - b_k)^2 + w_{k'}^2}{\sigma_{m,k} w_k (s - b_{k'})^2 + w_k^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{w_{k'}}(s - b_{k'})}}{1 + e^{-\frac{\pi}{w_k}(s - b_k)}} e^{-s\Delta t} \right) \right]^2 \right\} \quad (26a)$$

$$\frac{\rho}{E}t + \frac{\rho}{\eta} \frac{t^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} = L^{-1} \left\{ \frac{1}{s^4(h_k - h_{k'})^2} \left[\ln \left(\frac{\sigma_{m,k'} w_{k'} (s - b_k)^2 + w_{k'}^2}{\sigma_{m,k} w_k (s - b_{k'})^2 + w_k^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi}{w_{k'}}(s - b_{k'})}}{1 + e^{-\frac{\pi}{w_k}(s - b_k)}} e^{-s\Delta t} \right) \right]^2 \right\} \quad (26b)$$

式中: $\Delta t = \Delta x / c = (h_k - h_{k'}) / c$ 为波在厚度分别为 h_k 和 $h_{k'}$ 的牡蛎壳试样中传播的时间差, c 为波速。根据李毅^[15]对牡蛎壳试样的研究, c 可取为 $(0.369 \text{ m}^4 \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}) \rho + 1744 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 。

3.3 牡蛎材料的分数阶模型参数及黏弹性分析

通过 3.2 节的拟合方法, 应用式 (26) 对 0.5、0.7、1.2 和 1.4 g/cm³ 密度的牡蛎壳试样分别进行 Abel 黏壶模型和分数阶 Maxwell 模型的参数拟合, 记式 (26) 中等号右侧为 a_1 , 单位为 s³/m²。

图 9(a)~(b) 所示为不同密度牡蛎壳试样对应曲线的拟合情况, 曲线拟合的结果良好。表 1 给出了各密度牡蛎壳试样的 Abel 黏壶模型和分数阶 Maxwell 模型的拟合参数值。对于 0.5 和 0.7 g/cm³ 等较低密度的牡蛎壳试样, 拟合得到的分数阶阶数小于 1.0, 此时材料的性质表现为黏弹性特性; 对于 1.2 和 1.4 g/cm³ 等密度较高的牡蛎壳试样, 拟合得到的分数阶阶数大于 1.0, 此时材料的性质逐渐向惯性靠拢。

分数阶阶数、黏性系数随密度变化的趋势如图 9(c) 所示, 阶数与密度的关系近似呈线性关系, 而黏性系数与密度的关系近似呈指数衰减关系。牡蛎壳试样的珍珠层占比与试样的密度是成正比的, 这说明拟合得到的阶数 α 可以侧面反映牡蛎壳试样的结构特性。

由于不同密度试样对应的分数阶阶数和黏性系数均不同, 无法对不同密度的牡蛎壳试样的黏弹性进行定量的比较。因此固定分数阶阶数 α , 对不同密度的牡蛎壳试样的黏弹性参数进行拟合。固定的分数阶阶数 α 取为表 1 中 4 种密度试样拟合得到的 α 平均值。对于 Abel 黏壶模型来说, 固定的分数阶阶数为 1.0; 对于分数阶 Maxwell 模型来说, 其值为 0.94。当 $\alpha=1.0$ 时, Abel 黏壶模型变为牛顿黏壶模型, 此时模型没有了弹性部分, 因此对此种情形不进行拟合。当 $\alpha=0.94$ 时, 用分数阶 Maxwell 模型得到拟合的结果如图 9(d) 中所示, 对应的拟合参数如表 2 所示。

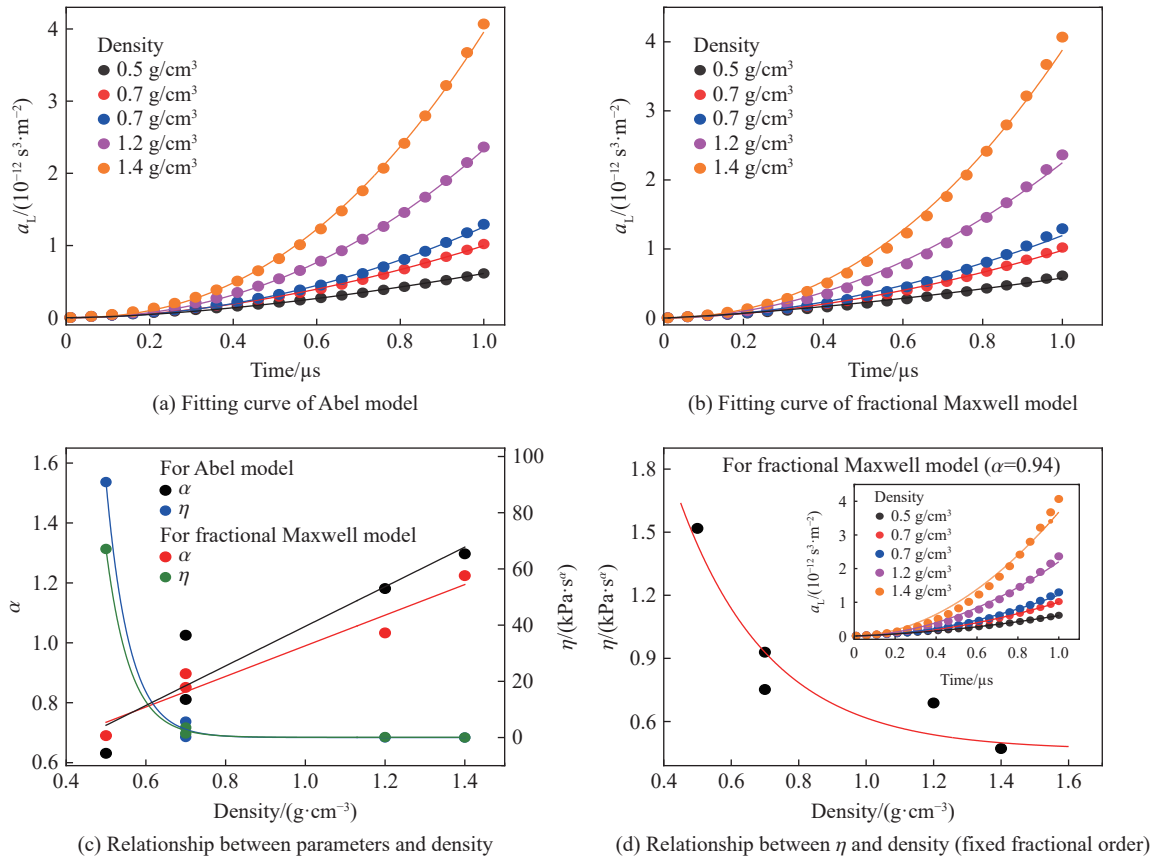


图 9 牡蛎试样分数阶模型的拟合曲线及参数与牡蛎试样密度的关系

Fig. 9 The fitting curve of the fractional model of the oyster sample and relationship between parameters and oyster sample density

表 1 牡蛎壳试样分数阶模型的拟合参数

Table 1 Fitting parameters of the fractional model of the oyster sample

材料本构	密度/(g·cm ⁻³)	α	E /GPa	η /(Pa·s ^{α})
Abel模型	0.5	0.631	-	9.09×10 ⁴
	0.7	0.811	-	5.65×10 ³
	0.7	1.025	-	192.12
	1.2	1.181	-	17.84
	1.4	1.297	-	2.19
分数阶Maxwell模型	0.5	0.690	2.21	6.71×10 ⁴
	0.7	0.851	7.34	3.55×10 ³
	0.7	0.897	7.67	1.45×10 ³
	1.2	1.033	12.88	170.01
	1.4	1.224	15.40	6.76

可以看出,在固定分数阶阶数的情况下,随着牡蛎壳试样的密度的增大,分数阶模型的黏性系数在减小,试样的黏性在增大。并且黏性系数与试样密度的关系并不是线性关系,而是近似呈现指数衰减关系,在牡蛎壳试样的密度达到 1.2~1.6 g/cm³ 时,黏性系数的数值趋于平稳。这进一步说明,牡蛎壳试样的密度越大,或者说牡蛎壳试样中珍珠层的占比越高,试样的黏性越大;但当密度达到一定数值后,或者说珍珠层占比达到一定值后,珍珠层占比的增加对波衰减的提升将不再显著。这对复合材料的结构设计具有一定的指导意义。

表 2 固定分数阶阶数情况下, 牡蛎壳试样分数阶 Maxwell 模型的拟合参数

材料本构	密度/(g·cm ⁻³)	α	E/GPa	$\eta/(\text{Pa}\cdot\text{s}^\alpha)$
分数阶Maxwell模型	0.5	0.94	2.44	1518.00
	0.7		7.67	929.35
	0.7		7.82	751.88
	1.2		13.15	687.85
	1.4		16.46	471.30

4 结 论

本文中从波传播理论出发, 基于 Caputo 分数阶微分的定义, 以 Abel 黏壶模型和分数阶 Maxwell 模型作为材料本构, 得到了相应的波传播控制方程, 通过 Laplace 变换得到了控制方程的解析解。结合解析解, 通过 Laplace 数值逆变换分别分析了 Abel 黏壶模型和分数阶 Maxwell 模型中分数阶阶数 α 、黏性系数 η 及弹性模量 E 对波衰减的贡献; 结合 CO₂ 脉冲激光实验测试信号给出了拟合分数阶本构模型参数的方法。在相同的加载条件下, 分别得到了 4 种密度 (0.5、0.7、1.2 和 1.4 g/cm³) 的牡蛎壳试样的分数阶模型参数。得到的主要结论如下。

(1) Abel 模型和分数阶 Maxwell 模型中分数阶阶数 α 和黏性系数 η 对应力波的衰减均有贡献, 而弹性模量 E 对波衰减的影响很小。波的衰减并不随着阶数 α 的增大而单调变化, α 存在一个中间值, 能使波的衰减达到最大。特别地, 当 $\alpha=2.0$ 时, 波传播表现出幅值衰减、形状不变的特征。

(2) 在相同的加载条件下, 牡蛎壳试样的密度越大, 或者说牡蛎壳试样中珍珠层的占比越高, 试样的黏性越大。这是由于 CO₂ 激光脉冲器发射的激光波长与牡蛎壳试样珍珠层的砖泥结构间的缝隙尺寸相近, 使得激光在冲击牡蛎壳试样中的珍珠层时发生较大的散射。

(3) 在不固定阶数 α 的情况下, 拟合得到的阶数 α 反映出牡蛎壳试样随着密度的增大由黏弹性机制向惯性转变的趋势。在固定阶数 α 的情况下, 随着牡蛎壳试样密度的增大, 分数阶模型的黏性系数 η 减小, 但关系并不是线性的, 而是近似为指数衰减。这说明当密度达到一定数值后, 或者说珍珠层占比达到一定阈值后, 珍珠层占比的增加对波衰减的提升将不再显著。

参考文献:

- [1] 杨挺青. 黏弹性力学 [M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 1992: 1-28.
 - [2] JI B H, GAO H J. Mechanical properties of nanostructure of biological materials [J]. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2004, 52: 1963-1990. DOI: 10.1016/j.jmps.2004.03.006.
 - [3] MAO L B, GAO H L, YAO H B, et al. Synthetic nacre by predesigned matrix-directed mineralization [J]. *Science*, 2016, 354: 107-110. DOI: 10.1126/science.aaf8991.
 - [4] GAO H L, CHEN S M, MAO L B, et al. Mass production of bulk artificial nacre with excellent mechanical properties [J]. *Nature Communications*, 2017(8): 287. DOI: 10.1038/s41467-017-00392-z.
 - [5] WU K J, SONG Z Q, ZHANG S S, et al. Discontinuous fibrous Bouligand architecture enabling formidable fracture resistance with crack orientation insensitivity [J]. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 2020, 117(27): 15465-15472. DOI: 10.1073/pnas.2000639117.
 - [6] HUANG Z W, LI H Z, PAN Z L, et al. Uncovering high-strain rate protection mechanism in nacre [J]. *Scientific Reports*, 2011(1): 148. DOI: 10.1038/srep00148.
 - [7] 徐松林, 刘永贵, 席道瑛等. 弹性波在含双裂纹岩体中的传播分析 [J]. *地球物理学报*, 2012, 55(3): 944-952. DOI: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.03.024.
- XU S L, LIU Y G, XI D Y, et al. Analysis of propagation of elastic wave in rocks with double-crack model [J]. *Chinese Journal of Geophysics*, 2012, 55(3): 944-952. DOI: 10.6038/j.issn.0001-5733.2012.03.024.

- [8] 谭子翰, 徐松林, 刘永贵, 等. 含多种尺寸缺陷岩体中的弹性波散射 [J]. *应用数学和力学*, 2013, 34(1): 38–48. DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.005.
TAN Z H, XU S L, LIU Y G, et al. Scattering of elastic waves by multi-size defects in rock mass [J]. *Applied Mathematics and Mechanics*, 2013, 34(1): 38–48. DOI: 10.3879/j.issn.1000-0887.2013.01.005.
- [9] WANG P F, XU S L, LI Z B, et al. Experimental investigation on the strain-rate effect and inertia effect of closed-cell aluminum foam subjected to dynamic loading [J]. *Materials Science and Engineering A*, 2014, 620: 253–261. DOI: 10.1016/j.msea.2014.10.026.
- [10] MIAO C H, XU S L, SONG Y P, et al. Influence of stress state on dynamic breakage of quartz glass spheres subjected to lower velocity impacting [J]. *Powder Technology*, 2022, 397: 117081. DOI: 10.1016/j.powtec.2021.117081.
- [11] HUANG J Y, HU S S, XU S L, et al. Fractal crushing of granular materials under confined compression at different strain rates [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2017, 106: 259–265. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2017.04.021.
- [12] TING T C T, MUKUNOKI I. A theory of viscoelastic analogy for wave propagation normal to the layering of a layered medium [J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1979, 46(2): 329–336. DOI: 10.1115/1.3424550.
- [13] 张鸣, 王道荣, 单俊芳, 等. 石英纤维布叠层材料冲击性能研究 [J]. *实验力学*, 2018, 33(2): 183–193. DOI: 10.7520/1001-4888-17-201.
ZHANG M, WANG D R, SHAN J F, et al. Investigation on impact properties of quartz fiber cloth laminated material [J]. *Journal of Experimental Mechanics*, 2018, 33(2): 183–193. DOI: 10.7520/1001-4888-17-201.
- [14] 李毅, 苗春贺, 徐松林, 等. 梯度密度黏弹性材料的波传播研究 [J]. *爆炸与冲击*, 2021, 41(1): 013202. DOI: 10.11883/bzycj-2020-0313.
LI Y, MIAO C H, XU S L, et al. Wave propagation in density-graded viscoelastic material [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2021, 41(1): 013202. DOI: 10.11883/bzycj-2020-0313.
- [15] 李毅. 梯度密度黏弹性材料的冲击响应研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2020: 17–74. DOI: 10.27517/d.cnki.gzkju.2021.001407.
LI Y. Investigation of dynamic response in density-graded viscoelastic material [D]. Hefei, Anhui, China: University of Science and Technology of China, 2021: 17–74. DOI: 10.27517/d.cnki.gzkju.2021.001407.
- [16] 陈文, 孙洪广, 李西成, 等. 力学与工程问题的分数阶导数建模 [M]. 北京: 科学出版社, 2010: 12–56.
- [17] BAGLEY R L. Power law and fractional calculus model of viscoelasticity [J]. *AIAA Journal*, 1989, 27(10): 1412–1417. DOI: 10.2514/3.10279.
- [18] 雷经发, 许孟, 刘涛, 等. 聚氯乙烯弹性体静态力学性能及本构模型 [J]. *爆炸与冲击*, 2020, 40(10): 103103. DOI: 10.11883/bzycj-2019-0249.
LEI J F, XU M, LIU T, et al. Static/dynamic mechanical properties and a constitutive model of a polyvinyl chloride elastomer [J]. *Explosion and Shock Waves*, 2020, 40(10): 103103. DOI: 10.11883/bzycj-2019-0249.
- [19] 段宇星, 杨强, 赵苗苗, 等. 弹性体材料应变率相关力学行为模型 [J]. *橡胶工业*, 2020, 67(12): 899–903. DOI: 10.12136/j.issn.1000-890X.2020.12.0899.
DUAN Y X, YANG Q, ZHAO M M, et al. Strain rate-related mechanical behavior model of elastomer material [J]. *China Rubber Industry*, 2020, 67(12): 899–903. DOI: 10.12136/j.issn.1000-890X.2020.12.0899.
- [20] WANG P F, YANG J L, SUN G Z, et al. Twist induced plasticity and failure mechanism of helical carbon nanotube fibers under different strain rates [J]. *International Journal of Plasticity*, 2018, 110: 74–94. DOI: 10.1016/j.ijplas.2018.06.007.
- [21] WANG P F, YANG J L, ZHANG X, et al. Dynamic behavior of carbon nanofiber-modified epoxy with the effect of polydopamine-coated interface [J]. *Mechanics of Advanced Materials and Structures*, 2018: 1827–1839. DOI: 10.1080/15376494.2018.1529843.
- [22] 薛晓. 碳纳米管纤维的动静态力学性能研究 [D]. 合肥: 中国科学技术大学, 2020: 53–61. DOI: 10.27517/d.cnki.gzkju.2020.000565.
XUE X. Investigation of dynamic and quasi-static mechanical properties of carbon nanotube fibers [D]. Hefei, Anhui, China: University of Science and Technology of China, 2020: 53–61. DOI: 10.27517/d.cnki.gzkju.2020.000565.
- [23] XUE X, WANG P F, GONG M, et al. Time-dependent microstructural evolution mechanisms of twisted carbon nanotube fibers under tension and relaxation [J]. *International Journal of Plasticity*, 2021, 136: 102866. DOI: 10.1016/j.ijplas.2020.102866.

- [24] 赵永玲, 侯之超. 基于分数导数的橡胶材料两种粘弹性本构模型 [J]. *清华大学学报 (自然科学版)*, 2013, 53(3): 378–383. DOI: 10.16511/j.cnki.qhdxxb.2013.03.004.
ZHAO Y L, HOU Z C. Two viscoelastic constitutive models of rubber materials using fractional derivations [J]. *Journal of Tsinghua University (Science and Technology)*, 2013, 53(3): 378–383. DOI: 10.16511/j.cnki.qhdxxb.2013.03.004.
- [25] BAGLEY R L, TORRVIK P J. A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity [J]. *Journal of Rheology*, 1983, 27(3): 201–210. DOI: 10.1122/1.549724CODEN:JORHD2.
- [26] 寇磊. 分数阶微分型双参数黏弹性地基矩形板受荷响应 [J]. *力学季刊*, 2013, 34(1): 154–160. DOI: 10.3969/j.issn.0254-0053.2013.01.020.
KOU L. Response of rectangular plate on fractional derivative two-parameter viscoelastic foundation [J]. *Chinese Quarterly of Mechanics*, 2013, 34(1): 154–160. DOI: 10.3969/j.issn.0254-0053.2013.01.020.
- [27] 尹耀得, 赵德敏, 刘建林, 等. 丙烯酸弹性体的率相关分数阶黏弹性模型研究 [J]. *力学学报*, 2022, 54(1): 154–162. DOI: 10.6052/0459-1879-21-445.
YIN Y D, ZHAO D M, LIU J L, et al. Study on the rate dependency of acrylic elastomer-based fractional viscoelastic model [J]. *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics*, 2022, 54(1): 154–162. DOI: 10.6052/0459-1879-21-445.
- [28] ZHAO D M, YIN Y D, LIU J L. A fractional finite strain viscoelastic model of dielectric elastomer [J]. *Applied Mathematical Modelling*, 2021, 100: 564–579. DOI: 10.1016/j.apm.2021.08.023.
- [29] ROSSIKHIN Y A, SHITIKOVA M V. Application of fractional calculus for dynamic problems of solid mechanics: novel trends and recent results [J]. *Applied Mechanics Reviews*, 2009, 63: 010801. DOI: 10.1115/1.4000563.
- [30] 冯卓意, 陈雪梅. 贝壳资源的深加工利用 [J]. *材料科学与工程学报*, 2022, 40(1): 123–128. DOI: 10.14136/j.cnki.issn1673-2812.2022.01.020.
FENG Z Y, CHEN X M. Research on the processing technology of seashell resource [J]. *Journal of Materials Science and Engineering*, 2022, 40(1): 123–128. DOI: 10.14136/j.cnki.issn1673-2812.2022.01.020.
- [31] 孙晋美, 郭万林. 贝壳珍珠母多级结构的化学-力学稳定性 [J]. *中国科学: 物理学 力学 天文学*, 2009, 39(11): 1654–1663.
SUN J M, GUO W L. Chemical-mechanical stability of the hierarchical structure of shell nacre [J]. *Scientia Sinica: Physica, Mechanica and Astronomica*, 2009, 39(11): 1654–1663.
- [32] CONNOLLY J A. The numerical solution of fractional and distributed order differential equations [D]. Liverpool, UK: University of Liverpool, 2004: 13–48.
- [33] 张元林. *工程数学 (积分变换)* [M]. 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 85–88.

(责任编辑 王易难)