

DOI: 10.11883/bzycj-2024-0030

基于广义波阻抗理论的 SHPB 试验中 弹性压缩阶段试件应力-应变曲线的 应力波效应及其影响机理*

高光发

(南京理工大学机械工程学院, 江苏 南京, 210094)

摘要: 定量研究分离式霍普金森压杆 (split Hopkinson pressure bar, SHPB) 试验中弹性压缩阶段试件中的应力波效应是解耦准确材料弹性曲线的基础。在满足平面波假设的基础上, 基于广义波阻抗理论, 对杆与试件面积不匹配时试件弹性压缩阶段应力波演化造成的结构效应开展了定量理论研究, 分析了不同情况下弹性阶段内试件唯象工程及实际材料应力-应变曲线的偏差特征与主要因素, 并揭示了影响这种偏差的影响规律及其机理。研究表明: 对于线性入射加载波, 当无量纲时间为 0.5 的倍数时, 即使其他参数改变, 试件唯象与材料实际的应力-应变曲线仍对应相等; 试件两端的应力差较大时, 若应力差的变化趋于稳定, 则试件唯象与材料实际的应力-应变曲线差异较小。计算了不同波动区间内试件的最大应力偏离值及其变化趋势和对应的无量纲时间, 研究了入射波是双线性组合波时试件的应力-应变曲线。研究表明: 双线性波入射时, 2 个线性区间可以独立分析, 无论如何组合线性区间或应力差如何变化, 只要试件两端应力差为近似恒定曲线, 对应的试件唯象工程应力-应变曲线都是相对准确的。

关键词: 分离式霍普金森压杆; 应力波效应; 应力均匀性假设; 动态应力-应变曲线

中图分类号: O347.4

国标学科代码: 13015

文献标志码: A

Stress wave effects and influencing mechanisms on stress-strain curves in the elastic compression stage of SHPB tests based on generalized wave impedance theory

GAO Guangfa

(School of Mechanical Engineering, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, Jiangsu, China)

Abstract: Quantitative investigation of stress wave effects during the elastic compression stage of split Hopkinson pressure bar (SHPB) tests is fundamental for decoupling accurate elastic curve of material. Based on the assumption of plane waves and utilizing the generalized wave impedance theory, a quantitative theoretical analysis of the structural effects caused by the evolution of stress waves during the elastic compression stage of specimens with mismatched bar/specimen cross-sectional areas is conducted. The characteristics and main influencing factors of the deviation between engineering stress-strain curves of specimens during the elastic stage and the actual material stress-strain curves under different conditions are explored. It further reveals the governing rules and mechanisms influencing these deviations. The analysis indicates that for linearly incident loading waves, when the dimensionless time is a multiple of 0.5, even if other parameters change, the engineering stress-strain values of the specimen correspond approximately to the actual material stress-strain values. Even when there is a significant stress difference at both ends of the specimen, if the variation of stress difference tends to stabilize, the difference between the engineering stress-strain curve of the specimen and the actual material stress-strain curve is relatively small. The study

* 收稿日期: 2024-01-22; 修回日期: 2024-06-20

基金项目: 国家自然科学基金 (12172179, U2341244, 11772160)

第一作者: 高光发 (1980—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, gfgao@ustc.edu.cn

calculates the maximum stress deviation value of the specimen and its corresponding dimensionless time, as well as the trend of the maximum stress deviation value of the specimen within different fluctuation intervals. Moreover, the study investigates the scenario where the incident wave is a bilinear combination wave. The results show that when a bilinear incident wave is present, the two linear intervals can be independently analyzed. Regardless of the combination or the variation of stress difference, only when the stress difference at both ends of the specimen reaches an approximately constant curve, the corresponding engineering stress-strain curve of the specimen is relatively accurate. This study provides theoretical references for the refined design of SHPB tests and the accurate data processing.

Keywords: split Hopkinson pressure bar; stress wave effects; uniform stress assumption; dynamic stress-strain curves

分离式霍普金森压杆(split Hopkinson pressure bar, SHPB)是当前材料动态压缩性能试验的核心装置之一。利用 SHPB 试验获取材料的一维动态应力-应变曲线,进而获得材料强度的应变率效应与动态应力-应变关系,是材料动态本构方程建立的重要环节。SHPB 试验建立在平面波假设和应力均匀性假设的基础上,理论上讲,满足这 2 个假设,SHPB 试验就能得到试件准确的应力-应变曲线。满足平面波假设,确保了试件的唯象工程应力-应变曲线是一维的、准确的;满足应力均匀性假设,保障了试件的唯象工程应力-应变曲线(简称试件的应力-应变曲线)与试件材料的工程应力-应变曲线(简称材料的应力-应变曲线)是相同的。其中,平面波假设是包含准静态试验的单轴压缩试验必须遵守的前提,然而,SHPB 试验过程中,试件两端面摩擦效应^[1-2]、杆与试件共轴问题^[3-4]、端面接触不良^[5-6]、杆中弹性波传播的弥散效应^[7-10]、试件横向惯性效应^[11]等因素破坏了平面波假设,影响了试验的准确性;这些问题无法避免,只能通过技术与算法改进的方法优化完善。更严重的是,在基于应力波传播与演化理论的 SHPB 试验中,试件的应力-应变曲线是材料的应力-应变曲线与试件中应力波效应(结构效应)耦合的结果,应力均匀性假设本身就不成立,它是为了避免复杂的应力波解耦分析和简化数据处理方法而人为设定的。即使满足或近似满足 2 个基本假设,也只表示试验中的应力-应变曲线是试件材料的动态应力-应变曲线,若考虑材料在某个应变率下的应力-应变关系,还需满足恒应变率假设,即加载阶段的某个时间区间内应变率保持或近似保持恒定。恒应变率问题是一个复杂的试验技术问题,一般可以通过整形片等技术来进行波形调节或利用算法进行校正,它不是本文的研究重点,不做深入分析。

一般而言,SHPB 试验中,材料的弹性阶段不在试件的近似应力均匀区间内,相应的弹性应力-应变曲线被认为是不准确的,然而有必要对试件弹性压缩阶段的应力波效应进行解耦分析。原因有三:首先,理论上满足应力均匀性假设是准确的,但也没有证据表明不满足应力均匀性假设是不准确的,部分学者在拟合材料本构方程或研究材料的黏性效应时,分析弹性阶段的应力-应变曲线,考察其动态杨氏模量^[12-14]和黏弹性特征^[15-17];其次,研究材料的动态屈服强度率效应是 SHPB 试验的核心任务之一,而动态屈服强度处于弹性阶段到塑性阶段的转折区,弹性阶段应力波效应的定量分析是准确确定材料动态屈服强度的重要支撑;最后,在工程应力-应变曲线的转换算法中,一般需要预先给出材料的弹性屈服应变才能转换塑性阶段的曲线,在准静态试验中,弹性屈服应变很小,可以不加区分直接转换,但在 SHPB 试验中,很多情况下试件的唯象弹性屈服应变明显大于材料的实际屈服应变,直接转换的误差极大。

特定的杆系统中,在平面波假设的前提下,影响应力波效应的主要因素有杆与试件横截面的面积比、试件的长度、试件材料的杨氏模量与密度等,其中杨氏模量与密度以声速和波阻抗以组合的形式对应力波效应产生影响,也就是说主要影响因素有面积比、试件长度、声速与波阻抗。理论上,试件长度越大、声速越小、广义波阻抗越大(但应小于杆的广义波阻抗)都会放大应力波效应,从而不利于试件的应力均匀性。本文中,在平面波假设和广义波阻抗理论的基础上,对试件弹性压缩阶段的应力波效应开展定量理论分析,研究杆与试件面积不匹配以及应力波效应时试件与材料的应力-应变曲线差异,以及应力波效应影响这种偏差的机理,揭示面积比对试件的应力-应变曲线的影响,以期从试件的应力-应变曲线中解耦出材料的应力-应变曲线,为 SHPB 试验的精细化设计和试验数据的准确处理提供理论参考。

1 基于广义波阻抗假设的一维弹性波透反射行为

SHPB 中, 设杆的直径 D 为 14.5 mm, 截面积为 A_b , 材料密度 ρ_b 为 7.83 g/cm³, 材料的杨氏模量 E_b 为 210 GPa, 声速为 c_b ; 试件的直径为 d , 截面积为 A_s , 长度 l_s 为 3 mm, 材料密度 ρ_s 为 7.83 g/cm³, 材料杨氏模量 E_s 为 210 GPa, 声速为 c_s , 如图 1 所示。本文中, 只考虑应力不均匀的影响与校正, 不考虑弥散效应, 因而设杆与试件材料的泊松比均为零。设置杆和试件的初始状态为静止松弛状态, 即图 2 中状态点 0、1 和 1' 对应的应力 σ_0 、 σ_1 和 $\sigma_{1'}$ 均为零, 初始时刻, 一个强度为 $\delta\sigma$ 的压缩增量波到达界面 A , 根据广义波阻抗假设, 该入射波在界面 A 上会同时产生反射和透射, 反射波 $[\sigma]_{0 \sim 2'}$ 与透射波 $[\sigma]_{1 \sim 2}$ 的强度分别为:

$$\begin{cases} [\sigma]_{0 \sim 2'} = \sigma_{2'} - \sigma_0 = \frac{k-1}{k+1} \delta\sigma \\ [\sigma]_{1 \sim 2} = \sigma_2 - \sigma_1 = \frac{A_b}{A_s} \frac{2k}{k+1} \delta\sigma \end{cases} \quad (1)$$

式中: σ_2 为图 2 中状态点 2 的应力, 其他类似。广义波阻抗比 k 为:

$$k = \frac{\rho_s c_s A_s}{\rho_b c_b A_b} = \frac{\sqrt{E_s \rho_s} A_s}{\sqrt{E_b \rho_b} A_b} \quad (2)$$

透射波 $[\sigma]_{1 \sim 2}$ 到达界面 B 的反射波强度为:

$$[\sigma]_{2 \sim 3} = \sigma_3 - \sigma_2 = \frac{1/k - 1}{1/k + 1} \frac{A_b}{A_s} \frac{2k}{k+1} \delta\sigma = \frac{1-k}{1+k} \frac{A_b}{A_s} \frac{2k}{k+1} \delta\sigma \quad (3)$$

类似地, 可以计算图 2 中不同波的强度。叠加计算后, 图 2 中状态点 n_1 的应力为:

$$\sigma_{n_1} = \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_1-1} \right] \frac{A_b}{A_s} \delta\sigma \quad (4)$$

基于时间 t , 定义无量纲时间:

$$\bar{t} = \frac{t}{t_0} = \frac{t}{2l_s/c_s} = \frac{\sqrt{E_s/\rho_s}}{2l_s} t \quad (5)$$

式中: \bar{t} 为无量纲时间, 表示弹性波在试件中往返运动的次数; t_0 为弹性波在试件中往返一次所需的时间。

以 $\delta\sigma$ 到达界面 A 为初始时刻, 可以给出 \bar{t} 时刻试件左端 (σ_l) 与右端 (σ_r) 的应力:

$$\begin{cases} \sigma_l(\bar{t}) = \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2(\bar{t}+1)} \right] \frac{A_b}{A_s} \delta\sigma \\ \sigma_r(\bar{t}) = \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2(\bar{t}+0.5)} \right] \frac{A_b}{A_s} \delta\sigma \end{cases} \quad (6)$$

式中: (\bar{t}) 表示取数 \bar{t} 的整数部分。

根据波阵面上的运动方程, 图 2 中试件各反射波波阵面速度的增量为:

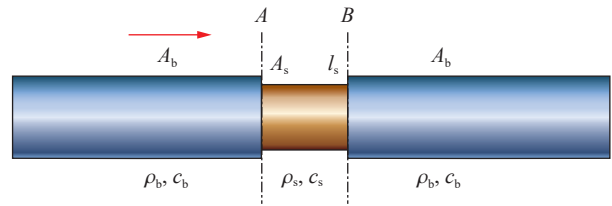


图 1 杆与试件的接触区
Fig. 1 Contact zone between rod and specimen

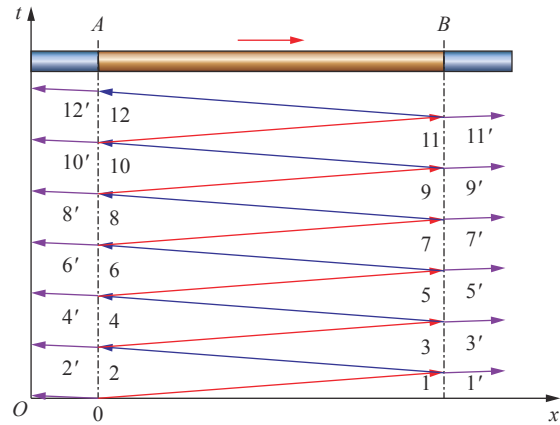


图 2 初始时刻单增量波入射对应的物理平面示意图
Fig. 2 Physical plane diagram corresponding to the initial moment of single incremental wave incidence

$$\begin{cases} [v]_{2n_1-1 \sim 2n_1} = v_{2n_1} - v_{2n_1-1} = -\frac{[\sigma]_{2n_1-1 \sim 2n_1}}{\rho_s c_s} = -\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n_1-2} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{\rho_s c_s} \\ [v]_{2n_1 \sim 2n_1+1} = v_{2n_1+1} - v_{2n_1} = \frac{[\sigma]_{2n_1 \sim 2n_1+1}}{\rho_s c_s} = \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n_1-1} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{\rho_s c_s} \end{cases} \quad (7)$$

式中： v_{2n_1} 为图 2 中状态点 $2n_1$ 的反射波波阵面速度，其他类似。图 2 中，不同时刻试件左端(v_l)与右端(v_r)的质点速度之差为：

$$[v] = v_l - v_r = \begin{cases} v_{2n_1} - v_{2n_1-1} = -\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n_1-2} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{\rho_s c_s} & \bar{t} \in (n_1 - 1, n_1 - 1/2) \\ v_{2n_1} - v_{2n_1+1} = -\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{2n_1-1} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{\rho_s c_s} & \bar{t} \in [n_1 - 1/2, n_1) \end{cases} \quad (8)$$

简化后可得：

$$[v] = v_l - v_r = -\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{(2\bar{t})} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{\rho_s c_s} \quad (9)$$

考虑到弹性阶段的变形量极小，可忽略工程应力-应变与真实应力-应变的差异，试件在不同时刻的应变率与应变分别为：

$$\dot{\varepsilon} = \frac{[v]}{l_s} = -\left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{(2\bar{t})} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{\rho_s c_s l_s} \quad (10)$$

$$\varepsilon(t) = \int \dot{\varepsilon} dt = -\left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{2A_b}{A_s} \frac{\delta\sigma}{E_s} \left[\sum_{i=0}^{(2\bar{t})-1} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^i - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{(2\bar{t})} \left(\bar{t} - \frac{\langle 2\bar{t} \rangle}{2}\right) \right] \quad (11)$$

2 试件两端面上的应力与试件应变率及应变的理论计算

设在初始时刻从界面 A 处入射一个强度为 σ_i 的压缩波，如图 3 所示，时间波长为 t_i ，加载应力曲线为 $\sigma_i = f(t)$ 。将入射波按极小时间步长 δt 离散成一系列强度为 $\delta\sigma_i$ 的增量波，若入射波不是线性波，则 $\delta\sigma_i = \sigma_i(\delta t)$ 不是恒值。当 δt 无穷小时，入射波皆为光滑连续波。基于式(6)，计算在加载阶段任意时刻($t \leq t_i$) 试件左端面的应力。

若 $\bar{t} < 1$ ，则：

$$\begin{aligned} \sigma_1(t) &= \sum_{j=0}^m \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \delta\sigma_j = \\ &= \frac{2k}{1+k} \frac{A_b}{A_s} \sum_{j=0}^m \delta\sigma_j = \frac{2k}{1+k} \frac{A_b}{A_s} f(t) \end{aligned} \quad (12)$$

式中： j 为变量。求和上限 m 可表示为：

$$m = \left\langle \frac{t}{\delta t} \right\rangle \approx \frac{t}{\delta t} \quad (13)$$

若 $1 \leq \bar{t} < 2$ ，则：

$$\sigma_1(t) = \sum_{j=0}^{m_1} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^3\right] \frac{A_b}{A_s} \delta\sigma_j + \sum_{j=0}^{m_2} \left(1 - \frac{1-k}{1+k}\right) \frac{A_b}{A_s} \delta\sigma_j \quad (14)$$

式中：

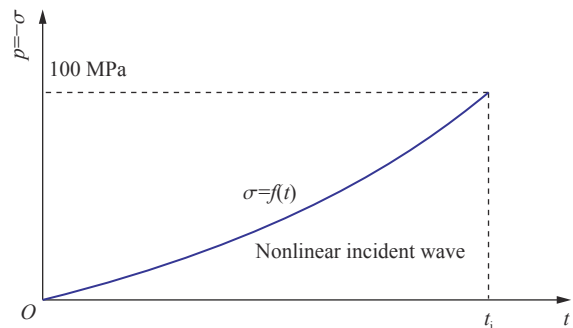


图 3 非线性加载时入射杆中的入射波示意图
Fig. 3 Schematic diagram of nonlinear incident wave in incident rod

$$m_1 = \left\langle \frac{(\bar{t} - \langle \bar{t} \rangle) t_0}{\delta t} \right\rangle \approx \frac{(\bar{t} - \langle \bar{t} \rangle) t_0}{\delta t}, \quad m_2 = \left\langle \frac{t_0}{\delta t} \right\rangle \approx \frac{t_0}{\delta t} \quad (15)$$

式 (14) 可进一步写为:

$$\sigma_1(t) = \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^3 \right] \frac{A_b}{A_s} f(t-t_0) + \left(1 - \frac{1-k}{1+k} \right) \frac{A_b}{A_s} [f(t) - f(t-t_0)] \quad (16)$$

类似地, 可以给出 $n \leq \bar{t} < n+1$ (n 为正整数) 时, 试件左端面的应力表达式:

$$\sigma_1(t) = \frac{A_b}{A_s} \sum_{j=1}^n \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2j-1} \right] [f(t-(j-1)t_0) - f(t-jt_0)] + \frac{A_b}{A_s} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n+1} \right] f(t-nt_0) \quad (17)$$

若入射波应力函数为:

$$\sigma_i = f(t) = \begin{cases} f(t) & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (18)$$

则试件左端面的应力可统一表示为:

$$\sigma_1(t) = \frac{A_b}{A_s} \sum_{j=0}^{\langle \bar{t} \rangle} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2j+1} \right] [f(t-jt_0) - f(t-(j+1)t_0)] \quad (19)$$

对于试件右端面, 当 $\bar{t} < 0.5$ 时, 应力为:

$$\sigma_r(t) = 0 \quad (20)$$

当 $0.5 \leq \bar{t} < 1.5$ 时, 应力为:

$$\sigma_r(t) = \sum_{j=0}^m \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \right] \frac{A_b}{A_s} \delta \sigma_i = \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \right] \frac{A_b}{A_s} f(t-0.5t_0) \quad (21)$$

当 $1.5 \leq \bar{t} < 2.5$ 时, 应力为:

$$\sigma_r(t) = \frac{A_b}{A_s} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 \right] [f(t-0.5t_0) - f(t-1.5t_0)] + \frac{A_b}{A_s} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^4 \right] f(t-1.5t_0) \quad (22)$$

依此类推, 可知当 $n+0.5 \leq \bar{t} < n+1.5$ 时, 应力为:

$$\begin{aligned} \sigma_r(t) = & \frac{A_b}{A_s} \sum_{j=1}^n \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2j} \right] [f(t-(j-1+0.5)t_0) - f(t-(j+0.5)t_0)] + \\ & \frac{A_b}{A_s} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n+2} \right] f(t-(n+0.5)t_0) \end{aligned} \quad (23)$$

式 (18) 为入射波应力函数, 则试件右端面的应力可统一表示为:

$$\sigma_r(t) = \begin{cases} 0 & \bar{t} \leq 0.5 \\ \frac{A_b}{A_s} \sum_{j=0}^{\langle \bar{t}-0.5 \rangle} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2j+2} \right] [f(t-(j+0.5)t_0) - f(t-(j+1.5)t_0)] & \bar{t} > 0.5 \end{cases} \quad (24)$$

综合式 (19) 和 (24), 入射杆中的反射波应力为:

$$\sigma_R(t) = \sum_{j=0}^{\langle \bar{t} \rangle} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2j+1} \right] [f(t-jt_0) - f(t-(j+1)t_0)] - f(t) \quad (25)$$

透射杆中透射波应力为:

$$\sigma_T(t) = \begin{cases} 0 & \bar{t} \leq 0.5 \\ \sum_{j=0}^{\langle \bar{t}-0.5 \rangle} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2j+2} \right] [f(t-(j+0.5)t_0) - f(t-(j+1.5)t_0)] & \bar{t} > 0.5 \end{cases} \quad (26)$$

以线性上升入射加载情况(图 4)为例, 设入射波峰值应力为 -100 MPa, 加载宽度为 10 mm, 利用 ABAQUS 软件进行数值仿真。仿真模型中三杆共轴, 且材料参数与第 1 节中参数相同, 采用二维轴对称线性显式单元, 网格尺寸为 0.25 mm×0.25 mm, 入射杆与透射杆长度均为 1000 mm, 加载时间宽度约 36 μs。数值仿真过程中, 虽然入射杆左端输入入射波为图 4 所示波形, 但在杆中传播过程中由于人工黏性使“尖锐”拐角部分成弧形, 导致入射波斜率减小; 且实际斜率越大, 数值误差越大, 导致输入的入射波与到达试件左端面的入射波差异较大。为了对比理论推导与数值仿真, 理论计算中也采用仿真中入射杆试件端真实的入射波代替式 (18), 计算杆中的反射波与透射波应力, 理论计算与数值仿真的结果对比如图 5 所示, 两者符合良好。数值仿真中, 虽然假设杆材料无泊松比, 但由于杆与试件面积不匹配, 导致直径相对较大的反射杆中存在明显的应力波紊乱行为, 反射波发生振荡; 对于线弹性波传播的二维轴对称有限元计算, 可以认为数值仿真结果是准确的。这也表明, 基于一维弹性波理论与广义波阻抗假设的理论推导是正确的。

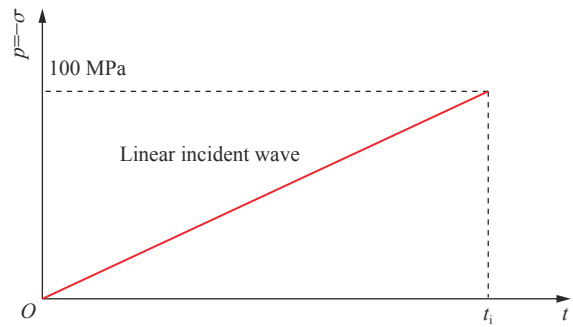


图 4 线性加载时入射杆中的入射波示意图
Fig. 4 Schematic diagram of linear loading incident waveform in incident rod

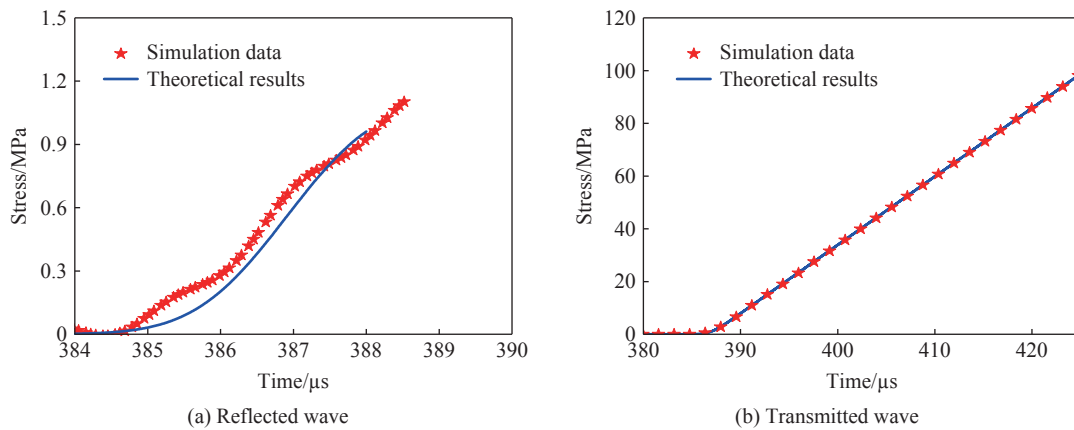


图 5 理论计算与数值仿真的反射波与透射波应力对比
Fig. 5 Comparison of theoretical calculation and numerical simulation of reflected and transmitted waves

根据式 (19) 和 (24), 计算入射波加载阶段不同时刻试件轴向应力平均值:

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{\sigma_1(t) + \sigma_r(t)}{2} = \begin{cases} \frac{\sigma_1(t)}{2} & \bar{t} \leq 0.5 \\ \frac{\sigma_1(t) + \sigma_r(t)}{2} & \bar{t} > 0.5 \end{cases} \quad (27)$$

和轴向应力差:

$$\Delta\sigma(t) = \sigma_1(t) - \sigma_r(t) = \begin{cases} \sigma_1(t) & \bar{t} \leq 0.5 \\ \sigma_1(t) - \sigma_r(t) & \bar{t} > 0.5 \end{cases} \quad (28)$$

类似地, $n/2 \leq \bar{t} < (n+1)/2$ 时, 试件左端面的应变率为:

$$\dot{\epsilon} = -\frac{A_b}{A_s} \frac{2k}{1+k} \frac{1}{\rho_s c_s l_s} \left\{ \sum_{j=0}^n \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^j \left[f\left(t - j\frac{t_0}{2}\right) - f\left(t - j\frac{t_0}{2} - \frac{t_0}{2}\right) \right] \right\} \quad (29)$$

3 入射波加载阶段试件工程应力-应变关系及其影响

若入射波为线性加载波(斜率为 κ), 即

$$\sigma_{li} = \begin{cases} \kappa t & t > 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases} \quad (30)$$

则式 (19) 和 (24) 可表示为:

$$\sigma_l(t) = \frac{A_b}{A_s} \kappa \begin{cases} \frac{2k}{1+k} t & \bar{t} \in [0, 1) \\ \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n+1} \right] (t - nt_0) + \left\{ n - \frac{1-k^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} \right] \right\} t_0 & \bar{t} \in [n, n+1) \end{cases} \quad (31)$$

$$\sigma_r(t) = \frac{A_b}{A_s} \kappa \begin{cases} 0 & \bar{t} \in \left[0, \frac{1}{2} \right) \\ \frac{2k}{1+k} \frac{2}{1+k} \left(t - \frac{1}{2} t_0 \right) & \bar{t} \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right) \\ \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n+2} \right] \left[t - \left(n + \frac{1}{2} \right) t_0 \right] + \left\{ n - \frac{(1-k)^2}{4k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{2n} \right] \right\} t_0 & \bar{t} \in \left[n + \frac{1}{2}, n + \frac{3}{2} \right) \end{cases} \quad (32)$$

对应试件的轴向平均应力为:

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \frac{A_b}{A_s} \kappa \left\{ \left[2 - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0} - \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0+1} \right] \left(t - \frac{n_0}{2} t_0 \right) + \left[2n_0 - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0} \right] \frac{t_0}{2} \right\} \quad \bar{t} \in \left[\frac{n_0}{2}, \frac{n_0+1}{2} \right) \quad (33)$$

式中: n_0 为非负整数。

根据固体中的一维杆共轴撞击理论, 不同撞击速度下, 入射波上升沿的宽度(即加载段的斜率)不同, 撞击速度越高, 对应的斜率就越大。上升沿宽度分别为 2、4、8、16 和 32 μs 的 5 种线性增加入射波如图 6 所示。试件的默认截面积为杆截面积的 1/2, 其他参数与第 1 节相同, 根据式 (33), 计算入射波斜率不同时试件的平均应力时程曲线, 结果如图 7 所示。可以发现: 在 $n_0 \leq \bar{t} < n_0 + 0.5$ 区间内, 平均应力曲线是光滑的; 当 \bar{t} 为 0.5 的整数倍时, 曲线出现转折, 特别是 $\bar{t} < 1.0$ 时, 这种转折特别明显; 而 $\bar{t} > 1.0$ 时, 试件的轴向平均应力时程曲线相对光滑。

根据式 (31)~(32), 计算试件两端轴向应力差:

$$\Delta\sigma(t) = \frac{A_b}{A_s} \kappa t_0 \left\{ \frac{2k}{1+k} \left(-\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0} \left(\bar{t} - \frac{n_0}{2} \right) + \frac{k}{2} \left[1 - \left(-\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0} \right] \right\} \quad \bar{t} \in \left[\frac{n_0}{2}, \frac{n_0+1}{2} \right) \quad (34)$$

线性入射波斜率不同时, 试件两端的应力差时程曲线如图 8 所示。可以看出: 在线性入射波加载阶段, 试件两端应力差在 $\bar{t}=0.5$ 时达到最大, 在 $\bar{t}=1.0$ 时降到最小, 之后小幅振荡; 当 $\bar{t} > 2.0$ 时, 试件两端的应力差近似为大于零的恒值, 且线性入射波的斜率越大, 该恒值就越大。由式 (34) 可知, 当 \bar{t} 较大时, 应力差可近似表示为:

$$\Delta\sigma(t) \rightarrow \frac{A_b}{A_s} k \kappa \frac{t_0}{2} \quad (35)$$

即应力差的近似恒值与入射波斜率成正比。

定义试件两端轴向的相对应力差为应力不均匀度:

$$U_\sigma(t) = \frac{\Delta\sigma(t)}{\bar{\sigma}(t)} \quad (36)$$

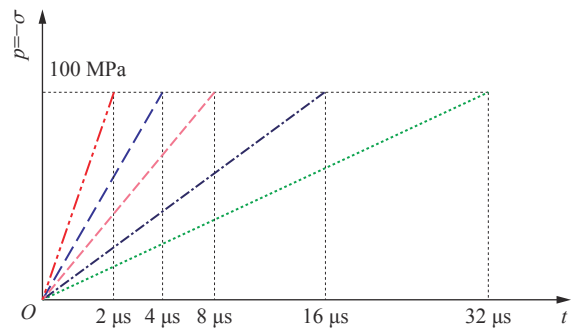


图 6 不同波长的线性入射波

Fig. 6 Incident waves with different wavelengths

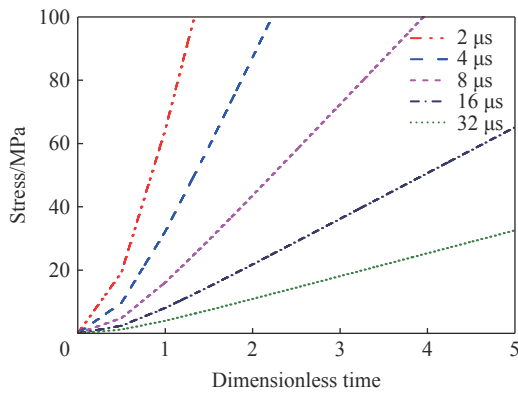


图 7 线性入射波斜率不同时试件的平均应力无量纲时程曲线
Fig. 7 Dimensionless time history curves of average stress in specimen at different slopes of incident wave

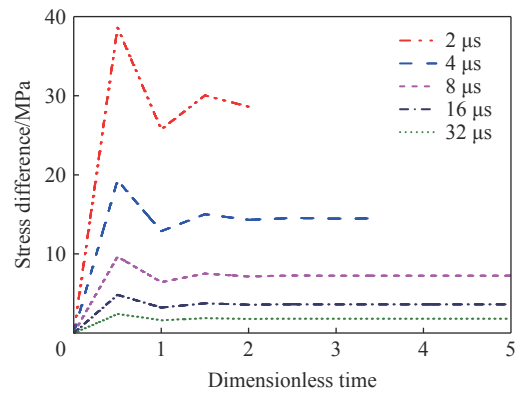


图 8 线性入射波斜率不同时试件两端的应力差时程曲线
Fig. 8 Time history curves of stress difference at both ends of specimen at different slopes of incident wave

则可计算线性入射波斜率不同时试件两端的应力不均匀度:

$$U_{\sigma}(t) = \frac{\frac{4k}{1+k} \left(-\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0} \left(t - \frac{n_0}{2}t_0\right) + k \left[1 - \left(-\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0}\right] t_0}{\left[2 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0} - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0+1}\right] \left(t - \frac{n_0}{2}t_0\right) + \left[2n - \frac{1}{k} + \frac{1}{k} \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0}\right] \frac{t_0}{2}} \quad \bar{t} \in \left[\frac{n_0}{2}, \frac{n_0+1}{2}\right] \quad (37)$$

计算结果如图 9 所示。可以看出: 在广义波阻抗比相同的情况下, 线性入射波斜率不同时, 试件两端的应力不均匀度时程曲线近似重合, 皆随着无量纲时间的增大而减小; 因而, 斜率较小的入射波由于弹性加载的无量纲时间较长, 使得最终的应力不均匀度较小, 当 $\bar{t} > 2.0$ 时, 试件两端的应力不均匀度减小到 0.2 以下。

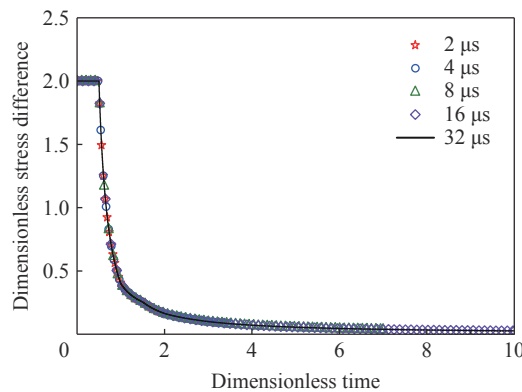


图 9 不同线性入射波斜率时试件两端的应力不均匀度时程曲线
Fig. 9 Time history curve of dimensionless stress difference in specimen at different slopes of incident wave

根据式 (29), 计算试件的应变率:

$$\dot{\varepsilon}(\bar{t}) = -\frac{A_b}{A_s} \frac{4k}{1+k} \frac{\kappa}{E_s} \left\{ \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0} \left(\bar{t} - \frac{n_0}{2}\right) + \frac{1+k}{4k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0}\right] \right\} \quad \bar{t} \in \left[\frac{n_0}{2}, \frac{n_0+1}{2}\right] \quad (38)$$

积分后, 得到试件的应变:

$$\varepsilon(t) = -\frac{A_b}{A_s} \frac{2k}{1+k} \frac{\kappa t_0}{E_s} \left\{ \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0} \left(\bar{t} - \frac{n_0}{2}\right)^2 + \frac{1+k}{2k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0}\right] \left(\bar{t} - \frac{n_0}{2}\right) + \frac{1+k}{4k} \left\{ n_0 - \frac{1}{2k} \left[1 - \left(\frac{1-k}{1+k}\right)^{n_0}\right] \right\} \right\} \quad \bar{t} \in \left[\frac{n_0}{2}, \frac{n_0+1}{2}\right] \quad (39)$$

根据式 (38)~(39), 计算线性入射波斜率不同时试件的应变率时程曲线和应变时程曲线, 结果如图 10 和 11 所示。

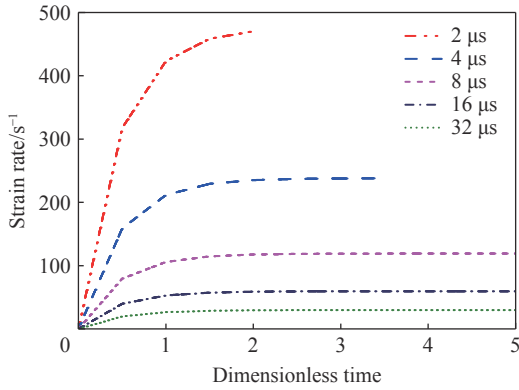


图 10 线性入射波斜率不同时试件的应变率时程曲线

Fig. 10 Time history curves of strain rate in specimen at different slopes of incident wave

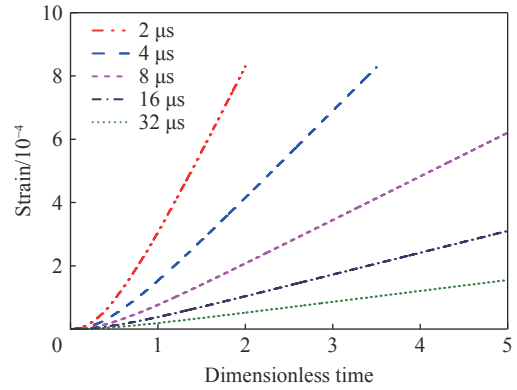


图 11 线性入射波斜率不同时试件的应变时程曲线

Fig. 11 Time history curves of strain in specimen at different slopes of incident wave

特别地, 当 \bar{t} 为 0.5 的整数倍, 即 $\bar{t} = 0.5n$ (n 为正整数) 时, 试件两端的平均轴向应力为:

$$\bar{\sigma}(t) = \frac{1}{2} \frac{k}{1+k} \frac{A_b}{A_s} \kappa \begin{cases} t_0 & \bar{t} = \frac{1}{2} \\ \frac{4+2k}{1+k} t_0 & \bar{t} = 1 \\ \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 + 3 \frac{1-k}{1+k} + 5 \right] t_0 & \bar{t} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (40)$$

对应的轴向工程应变为:

$$\varepsilon(t) = -\frac{1}{2} \frac{A_b}{A_s} \frac{k}{1+k} \frac{\kappa}{E_s} \begin{cases} t_0 & \bar{t} = \frac{1}{2} \\ \frac{4+2k}{1+k} t_0 & \bar{t} = 1 \\ \left[\left(\frac{1-k}{1+k} \right)^2 + 3 \frac{1-k}{1+k} + 5 \right] t_0 & \bar{t} = \frac{3}{2} \end{cases} \quad (41)$$

根据式 (40)~(41), 计算试件工程的杨氏模量:

$$E^s = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\varepsilon(t)} = \rho_s c_s^2 = E_s \quad (42)$$

式中: E_s 为试件材料的杨氏模量。类似地, 可以推导, $\bar{t} = 0.5n$ 时, 对应点与零点的连线斜率即试件唯象的杨氏模量正好等于材料的杨氏模量。

以入射波上升沿宽度为 $8 \mu\text{s}$ 为例, 根据式 (33) 和 (39), 计算试件的应力-应变曲线, 并与仿真计算中所输入的线弹性材料应力-应变曲线作对比, 如图 12 所示。可以看出, 试件的应力-应变曲线虽然波动, 但每当 $\bar{t} = 0.5n$ 时, 又回归到材料的应力-应变曲线上, 与理论推导的结论完全一致。由式 (41) 可知, $\bar{t} = 0.5n$ 时, 试件的应变与

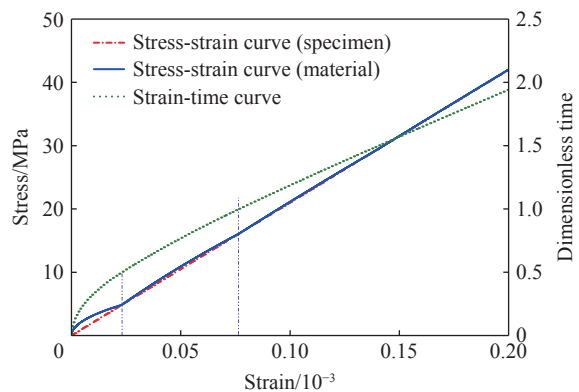


图 12 入射波上升沿宽度为 $8 \mu\text{s}$ 时试件与材料的应力-应变曲线

Fig. 12 Stress-strain curves of specimen and material with incident wave width of $8 \mu\text{s}$

成正比,也就是说,随着时间的推移,相同时间内试件的应变逐渐变大,图 12 中试件应力-应变曲线的波动周期也逐渐增大。

图 13 显示了 $\bar{t} = 0.5n$ 时,不同的入射波斜率对应的试件应力-应变点以及材料的应力-应变曲线。从图 11 和式(39)可以看出,随着入射波斜率的增大,相同时间内试件的应变成正比地增大,图 13 中应力-应变曲线的振荡周期也成正比地增加。

定义任意时刻试件的应力偏离值 ($\delta\sigma(t)$) 为试件的轴向平均应力 ($\bar{\sigma}$) 与材料的理论应力 (σ^*) 之差:

$$\delta\sigma(t) = \bar{\sigma} - \sigma^* = \bar{\sigma} - E_s \varepsilon \tag{43}$$

将式 (33) 和 (39) 代入式 (43), 则:

$$\delta\sigma(t) = \bar{\sigma} - \sigma^* = \frac{A_b \kappa}{A_s} \frac{k}{1+k} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0} t_0 \left[\left(\bar{t} - \frac{n_0}{2} \right) - 2 \left(\bar{t} - \frac{n_0}{2} \right)^2 \right] \tag{44}$$

当试件的应力-应变曲线斜率与材料的杨氏模量相等时,该斜率偏离真实材料应力-应变曲线斜率最大,即

$$\left| \frac{\bar{\sigma}'(t)}{\varepsilon'(t)} \right| = \left| \frac{\bar{\sigma}'(t)}{\dot{\varepsilon}(t)} \right| = \rho_s c_s^2 \tag{45}$$

式中: $\bar{\sigma}'$ 为平均应力对时间的导数, ε' 为应变对时间的导数。展开式 (45), 有:

$$|\bar{\sigma}'(t)| = \rho_s c_s^2 |\dot{\varepsilon}(t)| \tag{46}$$

将式 (33)、(37) 代入式 (46), 可解得:

$$\bar{t} = \frac{1}{4} + \frac{n_0}{2} \tag{47}$$

每个波动区间内,当 \bar{t} 满足式 (47) 时,式 (45) 成立。将式 (47) 代入式 (43), 获得不同波动区间的最大应力偏离值:

$$\delta\sigma_{\max} = \frac{A_b \kappa}{A_s} \frac{k}{8} \frac{k}{1+k} \left(\frac{1-k}{1+k} \right)^{n_0} t_0 \tag{48}$$

从式 (48) 可以看出,随着入射波斜率的增大,或试件长度的增大,或杆与试件截面积比的增大,应力偏离值线性增大,且随着时间的推移,下一个波动区间的最大应力偏离值明显小于上一个波动区间,如图 12 ~ 13 所示。

以入射波上升沿宽度为 $8 \mu\text{s}$ 且杆与试件截面积比为 2 为例,若杆与试件的材料相同,则式 (48) 可简化为:

$$\delta\sigma_{\max} = \left(\frac{1}{3} \right)^{n_0+1} \frac{\kappa t_0}{4} \approx \frac{58}{3^{n_0+1}} \text{ MPa} \tag{49}$$

结合式 (47) 和 (49) 可知: 当 $\bar{t} > 1.0$ 时,试件的唯象应力-应变与试件材料的真实应力-应变 2 条曲线的最大偏差约 2.1 MPa; 当 $\bar{t} > 2.0$ 时,2 条曲线的最大偏差小于 0.24 MPa,图 12 中,此时试件的唯象应力-应变曲线与材料应力-应变曲线基本重合,说明试件的曲线相对准确。综合式 (34) 和图 10 可以发现, $\bar{t} > 2.0$ 时,试件两端的应力差约为 7.15 MPa,相对应力不均匀度为 16.5%,应力波在试件中往返 2 次。因此,应力均匀性假设是试件弹性阶段应力-应变关系能相对准确测定的充分非必要条件。

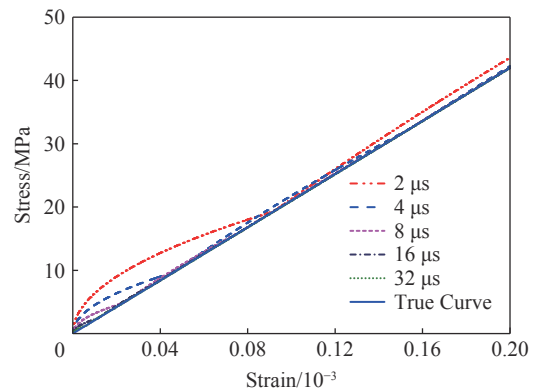


图 13 线性入射波斜率不同时试件的应力-应变曲线
Fig. 13 Stress-strain curve of specimen under different incident wave slopes

一般地,对于特定的 SHPB 和试件材料,其截面积减小,广义波阻抗比 k 成正比地减小,弹性入射波的峰值也成比例地减小。图 14 显示了杆与试件的截面积比分别为 2 : 1、3 : 1、4 : 1 和 5 : 1 时,试件的唯象应力-应变曲线以及试件材料的实际应力-应变曲线。可以看出:截面积比不同时,试件的唯象应力-应变曲线均表现出“振荡-回归”趋势,且振荡幅度逐渐减小;截面积比越小,振荡周期时间越短,最大偏离值越小。这是因为,相同时刻,随着截面积比的减小,试件的应变也减小,如图 15 所示。

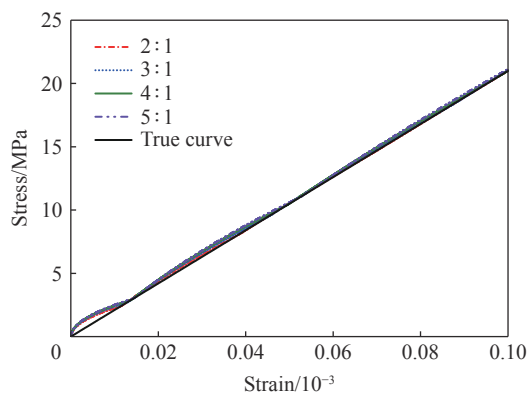


图 14 截面积比不同时试件与材料的应力-应变曲线
Fig. 14 Stress-strain curves of specimen and material with different area ratios

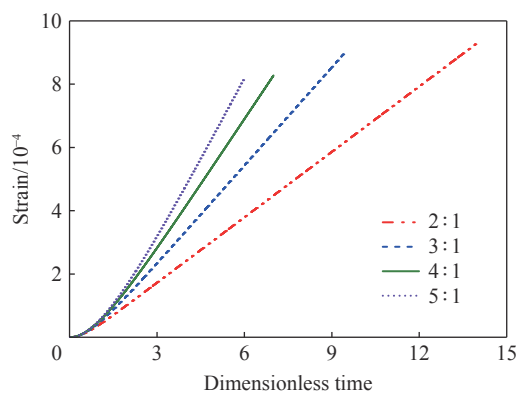


图 15 截面积比不同时试件的应变时程曲线
Fig. 15 Time history curves of strain in specimen at different area ratios

随着截面积比的增大,试件的唯象应变率特别是稳定阶段的应变率逐渐增大;截面积比小的试件达到应变率平台所需的时间更短,如图 16 所示。截面积比为 2 : 1、 $\bar{t} > 2.0$ 时,试件的应变率基本稳定在 60 s^{-1} 左右;而截面积比为 5 : 1、 $\bar{t} = 6.0$ 时,试件的应变率还未进入稳定区,约为 148 s^{-1} 。

对于试件两端的应力差,截面积比只影响它到达相对稳定区的时间;在稳定区,试件两端的应力差相同,约为 3.6 MPa,如图 17 所示。随着截面积比的增大,应力差时程曲线的振荡幅度也逐渐增大。截面积比为 2 : 1 时,最大应力差为 4.8 MPa;截面积比为 5 : 1 时,最大应力差为 6.0 MPa。随着截面积比的增大,应力差到达稳定区的时间也逐渐加大。截面积比为 2 : 1 时,应力差到达稳定区的无量纲时间为 2.0;截面积比为 5 : 1 时,应力差到达稳定区的无量纲时间超过 6.0。相应地,截面积比为 2 : 1 时, $\bar{t} > 2.0$,试件的唯象应力-应变曲线与试件材料的应力-应变曲线基本重合;而截面积比为 5 : 1 时, $\bar{t} > 6.0$,2 条曲线基本重合(图 14)。

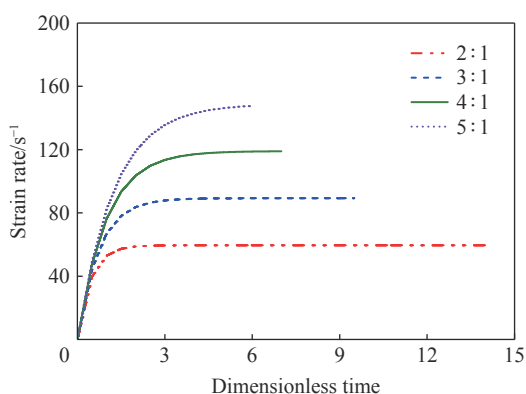


图 16 截面积比不同时试件的应变率时程曲线
Fig. 16 Time history curves of strain rate in specimen at different area ratios

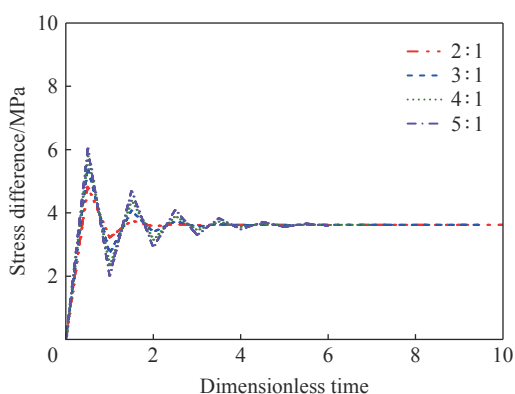


图 17 截面积比不同时试件两端的应力差时程曲线
Fig. 17 Time history curves of stress difference at both ends of specimen at different area ratios

4 非线性入射波时试件的工程应力-应变关系

实际 SHPB 试验中,入射波中的加载并不是理想的单线性加载,而是如图 18 所示的形式。将图 18 简化为双线性形式,从线性交点处分别取 1 个单位长度进行弧形光滑过渡处理,第 1 个线性加载宽度为 $4\ \mu\text{s}$ 、峰值应力为 10 MPa;第 2 个线性加载宽度分别为 2、4、8、16 和 $32\ \mu\text{s}$,峰值应力为 100 MPa。图 19 为第 2 个线性加载宽度为 $8\ \mu\text{s}$ 时试件的轴向平均应力与应变时程曲线,可以看出,2 条曲线的变化趋势与入射波相同,最大弹性应变约为 0.0008,最大应力约为 186 MPa。

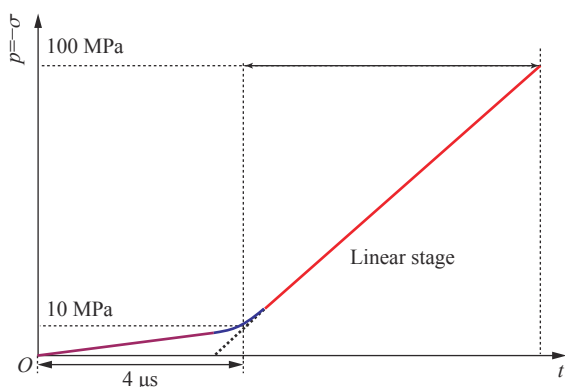


图 18 实际弹性加载曲线示意图
Fig. 18 Simplified schematic diagram of actual elastic loading curve

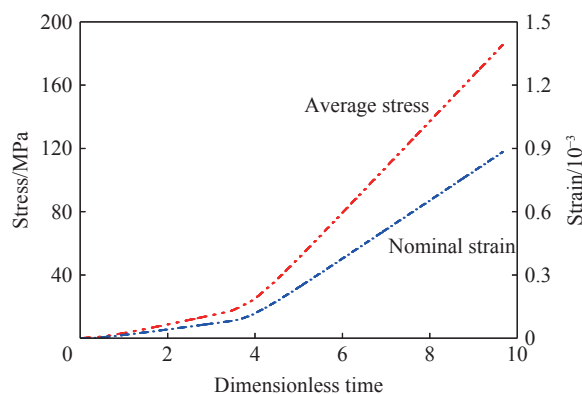


图 19 试件的轴向平均应力和应变时程曲线
Fig. 19 Time history curves of stress-strain under bilinear incident wave and comparison with single linear

对于近似双线性的入射波,试件的应力差(图 20)可划分为 2 个阶段。在第 1 阶段,由于入射波斜率较小,应力差的振荡幅度也较小, $\bar{t} > 1.0$ 后,基本稳定;在第 2 阶段,应力差与入射波的斜率相关,其变化趋势与单线性入射时一致。可以看出,这 2 个阶段没有明显的耦合关系,可以独立分析。

图 21 为双线性入射时试件的唯象应力-应变曲线,其变化趋势与图 20 的应力差时程曲线一致,可划分为 2 个阶段。在第 1 阶段,应力与应变线性相关;在第 2 阶段,应力-应变曲线特征与单线性入射时基本一致。2 个阶段无相互影响,这说明若入射波可等效为多段线性波的组合,且每一段的作用时间足以使试件的应力差到达恒定区,则对应的试件唯象工程应力-应变关系是相对准确的。

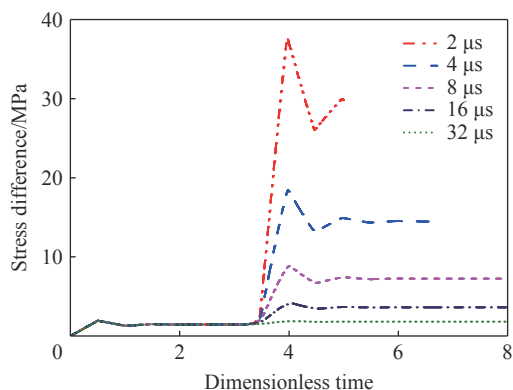


图 20 双线性入射时试件两端的应力差时程曲线
Fig. 20 Time history curves of stress difference at both ends of specimen under bilinear incident

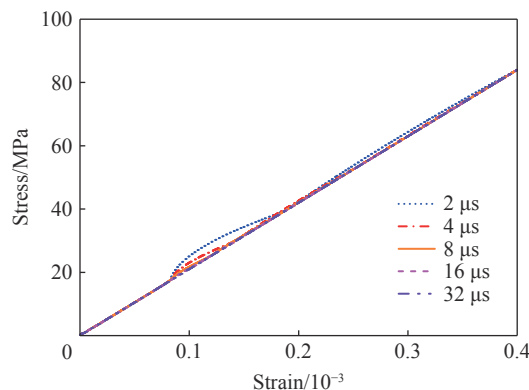


图 21 斜率不同双线性入射时试件的唯象应力-应变曲线
Fig. 21 Phenomenological stress-strain curves of specimen at different slopes of bilinear incident wave

5 结 论

针对 SHPB 试验中试件弹性阶段的应力-应变问题, 忽略杆与试件端面的摩擦以及面积不匹配导致的应力紊乱, 基于一维波的广义波阻抗假设, 对试件与杆不匹配时试件弹性压缩阶段应力波传播导致的结构效应开展了定量的理论分析, 揭示了杆与试件截面积比对弹性阶段内试件唯象工程应力-应变曲线的影响, 得到的主要结论如下。

(1) 基于广义波阻抗在界面上的平衡和连续条件, 考虑杆与试件面积不匹配的情况, 推导了任意应力波入射时在一维弹性波透反射作用下试件两端的应力、透反射应力波以及试件的唯象应变率, 并开展了对应的数值仿真研究, 理论推导与数值仿真的结果基本一致。

(2) 以线性入射加载波为例, 推导了试件的平均轴向应力、轴向应力差、试件唯象工程应变率与应变等关键参量, 分析了试件的唯象工程应力-应变曲线与实际材料应力-应变曲线的差异。当无量纲时间为 0.5 的倍数时, 即使其他参数变化, 试件的唯象工程应力-应变曲线与材料实际的应力-应变曲线对应相等。

(3) 杆与试件截面积不匹配的情况下, 对于单线性入射波, 即使试件两端的应力差较大, 若应力差的变化趋于稳定, 则试件唯象与材料实际的应力-应变曲线差异较小, 试件的唯象工程应力-应变曲线相对准确。对于多线性组合的入射波, 若每一段的应力差都能到达恒定区, 对应的试件唯象工程应力-应变曲线相对准确; 若在加载区间内, 应力差不能到达恒定区, 则试件的唯象工程应力-应变曲线存在一定偏差。

参考文献:

- [1] LIU F, LI Q M. Strain-rate effect of polymers and correction methodology in a SHPB test [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2022, 161: 104109. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2021.104109.
- [2] LIU P, HU D A, WU Q K, et al. Sensitivity and uncertainty analysis of interfacial effect in SHPB tests for concrete-like materials [J]. *Construction and Building Materials*, 2018, 163: 414–427. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.2017.12.118.
- [3] KARIEM M A, BEYNON J H, RUAN D. Misalignment effect in the split Hopkinson pressure bar technique [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2012, 47: 60–70. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2012.03.006.
- [4] NIE H L, MA W F, HE X L, et al. Misalignment tolerance in one-side and symmetric loading Hopkinson pressure bar experiments [J]. *Acta Mechanica Sinica*, 2022, 35(2): 273–281. DOI: 10.1007/s10338-021-00267-3.
- [5] GUO Y B, GAO G F, JING L, et al. Dynamic properties of mortar in high-strength concrete [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2022, 165: 104216. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2022.104216.
- [6] PANOWICZ R, JANISZEWSKI J, KOCHANOWSKI K. Effects of sample geometry imperfections on the results of split Hopkinson pressure bar experiments [J]. *Experimental Techniques*, 2019, 43(4): 397–403. DOI: 10.1007/s40799-018-0293-7.
- [7] BRIZARD D, JACQUELIN E. Uncertainty quantification and global sensitivity analysis of longitudinal wave propagation in circular bars: application to SHPB device [J]. *International Journal of Solids and Structures*, 2018, 134: 264–271. DOI: 10.1016/j.ijsolstr.2017.11.005.
- [8] YANG H S, LI Y L, ZHOU F H. Propagation of stress pulses in a Rayleigh-Love elastic rod [J]. *International Journal of Impact Engineering*, 2021, 153: 103854. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2021.103854.
- [9] BRAGOV A M, LOMUNOV A K, LAMZIN D A, et al. Dispersion correction in split-Hopkinson pressure bar: theoretical and experimental analysis [J]. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 2022, 34(4): 895–907. DOI: 10.1007/s00161-019-00776-0.
- [10] RIGBY S E, BARR A D, CLAYTON M. A review of Pochhammer-Chree dispersion in the Hopkinson bar [J]. *Engineering and Computational Mechanics*, 2018, 171(1): 3–13. DOI: 10.1680/jencm.16.00027.
- [11] REN L, YU X M, HE Y, et al. Numerical investigation of lateral inertia effect in dynamic impact testing of UHPC using a split-Hopkinson pressure bar [J]. *Construction and Building Materials*, 2020, 246: 118483. DOI: 10.1016/j.conbuildmat.

2020.118483.

- [12] ROTARIU A N, TRANĂ E, MATACHE L. Young's modulus calculus using split Hopkinson bar tests on long and thin material samples [J]. [Materials](#), 2022, 15(9): 3058. DOI: 10.3390/ma15093058.
- [13] AGHAYAN S, BIELER S, WEINBERG K. Determination of the high-strain rate elastic modulus of printing resins using two different split Hopkinson pressure bars [J]. [Mechanics of Time-Dependent Materials](#), 2022, 26(4): 761–773. DOI: 10.1007/s11043-021-09511-2.
- [14] ZHANG Q M, HUANG X M, GUO R, et al. Study on dynamic impact response and optimal constitutive model of Al-Mg-Si aluminum alloy [J]. [Materials](#), 2022, 15(21): 7618. DOI: 10.3390/ma15217618.
- [15] CHEN J P, TAO W J, HUAN S, et al. Data processing of wave propagation in viscoelastic split Hopkinson pressure bar [J]. [AIP Advances](#), 2022, 12(4): 045210. DOI: 10.1063/5.0083888.
- [16] ZHOU Z P, GAO D D, LIN G J, et al. Static and dynamic mechanical properties of epoxy nanocomposites reinforced by hybridization with carbon nanofibers and block ionomers [J]. [Engineering Fracture Mechanics](#), 2022, 271: 108638. DOI: 10.1016/j.engfracmech.2022.108638.
- [17] PRAKASH G, SINGH N K, GUPTA N K. Flow behaviour of Ti-6Al-4V alloy in a wide range of strain rates and temperatures under tensile, compressive and flexural loads [J]. [International Journal of Impact Engineering](#), 2023, 176: 104549. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2023.104549.

(责任编辑 王小飞)