DOI: 10.11883/bzycj-2024-0470

理想流体空穴湮灭能量汇问题的特征能量因子*

陈昊祥[1,2], 王明洋[3], 李 杰[3], 蒋海明[3]

(1. 北京建筑大学土木与交通工程学院, 北京 100044;
2. 军事科学院国防工程研究院目标易损性评估全国重点实验室, 河南 洛阳 471023;
3. 陆军工程大学爆炸冲击与防灾减灾国家重点实验室, 江苏 南京 210007)

摘要: 在物理学中, “源”指的是物质或能量的出发点, 而“汇”则是指物质或能量的到达点。类比地下爆炸能量源问题, 提出了理想流体空穴湮灭的能量汇问题, 详细分析了理想流体空穴湮灭问题中能量的平衡关系与调整机制, 建立了流体压力做功与能量汇聚、传递和转化的关系, 引入了描述能量汇“向心汇聚”问题的特征能量因子。分析了特征能量因子的物理机理与数学依据, 阐述了特征能量因子的特点、优势以及适用范围。能量汇特征能量因子包含了汇聚能量、空穴的几何尺寸以及流体的物理性质等信息, 能很好地表征能量汇问题的“汇聚”特性, 可为后续固体“能量汇”问题的研究奠定理论基础。

关键词: 能量源; 能量汇; 地下爆炸; 空穴湮灭; 特征能量因子

中图分类号: O389 **国标学科代码:** 13035 **文献标志码:** A

Characteristic energy factors for energy sink problem of the ideal fluid cavity annihilation

CHEN Haoxiang[1,2], WANG Mingyang[3], LI Jie[3], JIANG Haiming[3]

(1. *School of Civil and Transportation Engineering*, *Beijing University of Civil Engineering and Architecture*, *Beijing* 100044, *China*;
2. *State Key Laboratory of Target Vulnerability Assessment*, *Defense Engineering Institute*, *AMS*, *Luoyang* 471023, *Henan*, *China*;
3. *State Key Laboratory of Disaster Prevention and Mitigation of Explosion and Impact*, *Army Engineering University of PLA*, *Nanjing* 210007, *Jiangsu*, *China*)

Abstract: In physics, a “source” denotes the origin of matter or energy, while a “sink” refers to the terminal point of matter or energy. By analogizing with the energy source problem in underground explosions, this study proposes an energy sink problem for ideal fluid cavity annihilation. A detailed analysis is conducted on the energy balance and adjustment mechanisms in the ideal fluid cavity annihilation problem, establishing the relationships among fluid pressure work, energy convergence, transmission and transformation. A characteristic energy factor is introduced to describe the “centripetal convergence” behavior of energy sinks. The characteristic energy factor for energy sinks incorporates the information on converged energy, geometric dimensions of cavities and physical properties of fluids, effectively characterizing the “convergence” behavior of energy sink problems and laying a theoretical foundation for the subsequent research on “energy sink” problems in solids. The physical mechanisms and mathematical foundations of the characteristic energy factor are analyzed, and its characteristics and advantages are expounded. Specifically, the introduction of the characteristic energy factor circumvents the need for complex

* **收稿日期:** 2024-12-02; **修回日期:** 2025-09-08
基金项目: 国家自然科学基金(52408353); 北京市自然科学基金(8222010); 军事科学院国防工程研究院目标易损性评估全国重点实验室开放基金(YSX2024KFXY003)
第一作者: 陈昊祥(1992—), 男, 博士, 副教授, chx@stu.bucea.edu.cn
通信作者: 王明洋(1966—), 男, 博士, 教授, wmyrf@163.com

stress-strain relationships, boundary conditions, and unknown internal material structures in traditional continuum mechanics, significantly simplifying the complexity of the problem. The characteristic energy factor is primarily applicable to the predictions of engineering disasters with large scales or well-defined failure zones (e.g., underground explosions, large-scale surrounding rock deformation, zonal disintegration or pendulum waves, and shear-slip rock bursts in ore pillars), whereas its applicability to highly localized engineering disasters with unknown failure zones (e.g., strain-type rock bursts) requires further investigation.

Keywords: energy source; energy sink; underground explosion; cavity annihilation; characteristic energy factor

能量的聚集和释放在固体材料的变形破坏过程中起着重要作用，Kramarenko 等[1] 首次提出了能量流线及能量流矢量的观点，认为能量类似于可压缩流体，可以在固体介质中按一定的规律流动。Revuzhenko 等[2] 研究了含椭圆形切口弹性平板在不同加载条件下的应力-应变关系，分析了可变形体中能量的转移问题，并建立了能量流线，揭示了变形材料实际上是能量流动所凭借的介质。

在流体物理中，“源”指的是物质的出发点，而“汇”则是指物质的到达点，考虑到能量流理论，此时“源”和“汇”同样可以用来描述固体介质中的能量流动。由于固体变形材料是能量流动的介质，因此其内部的能量流动通常伴随着固体介质的变形（或流动）。从能量流动的角度来看，“能量源”和“能量汇”是一组对立统一的问题：能量源相当于一个简单的“扩张中心”，类似于弹簧振子，能量从中心向外辐射；能量汇是一个简单的“向心汇聚”问题，能量由四周向中心聚集。

地下爆炸作为典型的“能量源”问题，以爆腔为中心向外辐射能量，释放能量的大小对于地下工程结构安全以及地壳稳定性等具有重要影响。对于地下爆炸而言，随比例埋深的增大可分为地表爆炸、浅埋爆炸、深埋爆炸以及封闭爆炸，为了评估地下爆炸辐射地冲击对周围结构的影响程度，需要研究不同埋深下地冲击波的传播规律[3]。图 1 为不同比例埋深（$\bar{h}$）地下爆炸辐射地冲击能量之比，用比例系数 η 表示[4]。由图可知，随着埋深的增大，爆炸辐射出的地冲击能量急剧增长，此时作用于地下结构上的爆炸荷载也随之增大。

而作用于地下结构上的荷载则主要取决于地冲击波的最大粒子速度，图 2 为纵波中最大粒子速度相对值随比例埋深（地表爆炸、浅埋爆炸、深埋爆炸以及封闭爆炸）的变化情况[5]。

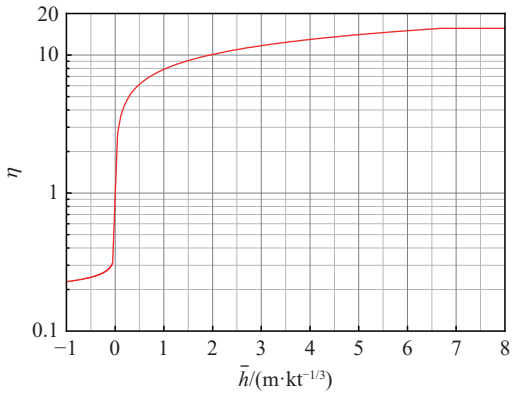

图 1　地冲击能量系数随比例埋深的变化

Fig. 1　Variation of impact energy coefficient with proportional burial depth

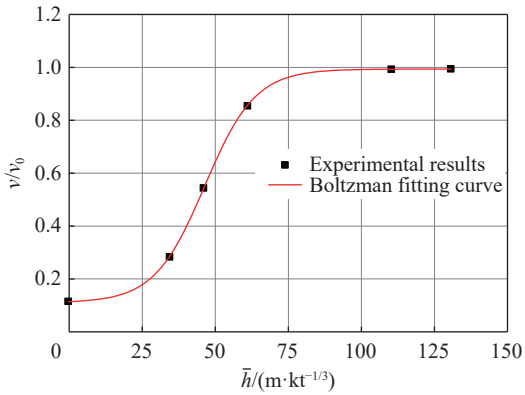

图 2　纵波最大粒子速度随比例埋深的变化规律

Fig. 2　Variation of the maximum particle velocity of the longitudinal wave with proportional burial depth

图中，$\bar{h}=h/Q^{1/3}$，h 为炸药的中心位置，Q 为爆炸当量，v 为不同埋深爆炸最大粒子速度，v_0 为封闭爆炸最大粒子速度。观察图 1～2 可以发现，地下爆炸地冲击力和辐射能量随比例埋深的变化情况复杂。况且爆炸空腔区及非弹性区（包括破碎区和径向裂纹区）的物理化学反应剧烈，很难求得其变形与应力场的解析表达式。因此，从理论上难以确定地下爆炸的类型和估算各个分区的边界、范围以及相应辐射

出的地冲击力与能量。

Kurlenya 等[6] 对大量地震、岩爆以及不同能量等级的深地下爆炸试验中能量和摆型波载体(地质块体)尺寸之间的关系进行了研究，总结了深部岩体准共振和摆型波现象出现的能量量纲条件。

地下爆炸形成的破坏区相当于一个简单的“扩张中心”，原理类似于压缩的弹簧振子，能量以径向力做功的形式从各爆炸分区边界向外辐射，破坏区范围决定了辐射出的地震波能流密度及其频率大小。地下爆炸“扩张中心”的能量源(震源)特性同样可以采用无量纲的能量因子表征[7]：

$$k = \frac{W}{M_i c_{\mathrm{P}}^2} \tag{1}$$

式中：W 为以径向力做功的形式从各爆炸分区边界向外辐射出去的能量，M_i 为各个分区所包含的岩体质量，$M_i c_{\mathrm{P}}^2$(c_{P} 为岩体纵波波速)为各分区对应岩体的静能量。

Shishkin[8] 在研究地下爆炸弹性波的辐射效率时，发现地下爆炸释放出的特征弹性地震波能量大小完全取决于非弹性变形区边界径向力沿边界向外位移所做的功，非弹性区的范围决定了辐射出的弹性地震波的能流密度及频率大小。为了探究不同比例埋深地下爆炸地冲击能量效率，钱七虎等[3] 在 Haskell[9] 和 Shishkin[10] 研究的基础上，分析了封闭爆炸与接触爆炸辐射出的弹性波能量，研究表明：当爆炸当量一定时，封闭爆炸与接触爆炸辐射出的弹性波能量计算公式近似一致，但由于两者非弹性区规模差异巨大，导致封闭爆炸释放的弹性能量要远远大于接触爆炸；如果采用 Kurlenya 等[6] 提出的无量纲能量因子分析，则地下封闭爆炸辐射出的弹性特征能量因子为：

$$k = \frac{W}{M_{\mathrm{p}} c_{\mathrm{P}}^2} \approx \frac{\alpha}{12}\left(\frac{\tau_{\mathrm{s}}}{\mu}\right)^2 \tag{2}$$

式中：M_{p} 为围岩塑性区质量，α 为无量纲系数，τ_{s} 为岩石抗剪强度，μ 为岩石剪切模量，且 $\tau_s/\mu = \gamma^e$ 为岩石的弹性极限剪应变。同理，接触爆炸辐射出的弹性特征能量因子为：

$$k' = \frac{W}{M_{\mathrm{p}} c_{\mathrm{P}}^2} = \frac{\alpha}{12}\left(\frac{\tau_{\mathrm{s}}}{\mu}\right)^2 \tag{3}$$

因此，地下爆炸辐射出的弹性特征能量因子 k 的量纲为应变的平方，取值仅依赖于岩石的弹性极限剪应变。当岩石的泊松比 $\nu = 0.2$、$\tau_s/\mu = 1 \times 10^{-3}$ 时，封闭爆炸与接触爆炸的弹性特征能量因子为：

$$k = k' \approx 10^{-7} \tag{4}$$

由式(4)可知，虽然封闭爆炸与接触爆炸辐射出的弹性能总量相差很大，但其特征能量因子近似相等，反映了特征能量因子的稳定性。

与弹性区不同，地下爆炸空腔区及非弹性区的物理力学性质复杂，无法求解其内部变形与应力场的解析表达式。但大量的试验调查和理论分析表明，爆炸各个分区的几何尺寸与爆炸当量之间存在着固定的比例关系[11]。根据这些比例关系可得地下封闭爆炸各分区所对应的特征能量因子[12]：

$$k_0 = \frac{W_0}{M_0 c_{\mathrm{P}}^2} = \frac{3}{4\pi}\frac{\alpha_0}{\beta^3}\frac{E_0}{Q}\left[\frac{2\tau_{\mathrm{s}}}{\mu}\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}\right]^{2/3} \tag{5}$$

$$k_1 = \frac{W_1}{M_1 c_{\mathrm{P}}^2} = \left[\frac{3\tau_{\mathrm{s}}}{\mu(1+\nu)}\right]\frac{\alpha_1}{\alpha_0}k_0 \tag{6}$$

$$k_2 = \frac{W_2}{M_2 c_{\mathrm{P}}^2} = \left(\frac{2\sigma_{\mathrm{t}}}{\sigma_{\mathrm{s}}}\right)^{3/2}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}k_1 \tag{7}$$

式中：W_i(i=0,1,2)分别为空腔区、破碎区和径向裂纹区辐射出的能量；M_i(i=0,1,2)分别为空腔区、破碎区和径向裂纹区包含的岩石质量；α_i(i=0,1,2)分别为空腔区、破碎区和径向裂纹区辐射出的能量效率；E_0 为爆炸能量，与爆炸当量 Q 的换算关系：$E_0/Q = 4.19\times10^{12}$ J/kt。此时，除能量效率 α_i 以外，式中的其他参数均由岩石自身的力学性质决定。如能确定各分区辐射出的能量效率，即可求得各个分区的特征能量因子。

常见岩石的力学参数为：泊松比 ν 取 0.2～0.4，弹性极限剪应变 τ_s/μ 取（1～2）×10^{-3}，即可估算得到爆炸各个分区释放出的特征能量因子所在的量级，如表 1 所示。

表 1　不同爆炸区的特征能量因子[12]

Table 1　Characteristic energy factors of different explosion zones[12]

爆炸分区	空腔区	破碎区	径向裂纹区
特征能量因子k	10^{-3}	10^{-5}	10^{-7}

由爆炸各分区的特征能量因子可知，各分区所对应的特征能量因子数值稳定仅与岩石自身的力学参数有关（如泊松比 ν，极限剪应变 τ_s/μ），且随爆心距增大辐射出的特征能量具有等级递减规律。因此，在研究地下爆炸问题时，选用特征能量因子作为不变量可以将许多复杂问题简单化，为地下爆炸问题的研究提供一个新的思路。

王明洋等[13]通过解析地下爆炸距爆心不同区域的能量辐射特性，构建了以特征能量因子定量表征各区变形特征的一致性方法，得到了爆炸不同分区所对应的能量因子阈值，发现其大小呈现等级跃减规律。研究证明：特征能量因子的引入可以很好地描述能量源的震源特性并简化复杂的数学计算，这促使作者考虑是否同样存在着一个可以描绘能量汇“向心汇聚”问题的无量纲能量因子。流体空化是由于液流系统中局部压力降低、液体蒸发而引起微气泡生长的现象[14]。空化发生时，在液体中形成的空洞称为空穴。空穴形成后，液体在压力差的作用下向空穴中心移动，并伴随着能量集中。理想流体空穴湮灭是典型的“能量汇”问题，能量以径向力做功的形式由无穷远处向空穴汇集。

本文以地下爆炸和理想流体空穴湮灭为例引出“能量源”和“能量汇”问题，分析空穴湮灭“能量汇”问题中的特征能量并提出了对应的特征能量因子，建立区域内部物理量与边界物理量的联系。随后揭示特征能量因子的物理机理与数学依据，阐述特征能量因子的特点、优势以及适用范围。详细讨论理想流体空穴湮灭问题中能量的平衡关系与调整机制，建立应力做功与能量汇聚、传递和转化的关系，得到描述空穴湮灭“向心汇聚”问题的特性能量因子，以期为后续研究散体材料和固体材料中的“能量汇”问题提供理论参考。

1　特征能量因子的特点

特征能量因子具有以下特点：（1）包含了能量以及破坏区质量等信息，可以很好地表征“能量源”的震源特性；（2）弹性特征能量因子 k 的量纲为应变的平方，数值稳定仅依赖于岩石的弹性极限剪应变，可作为不变量用以判断材料的力学状态；（3）特征能量因子的引入可以避免传统连续介质力学中复杂的应力应变关系、边界条件以及材料未知的内部结构，在很大程度上简化了问题的难度；（4）能量作为标量具有简单的可加性，因此特征能量因子对于塑性问题同样适用；（5）特征能量因子 k 与爆炸分区径向位移 u_r 成线性关系，表明了爆炸辐射出的能量由边界位移的累积形成，此时能量的可加性由位移的可加性体现。特征能量因子 k 对时间 t 求导可得特征能量变化率与边界位移速率 v 之间的关系。实际工程中可通过监测边界上的位移和速度信息来表征岩体内部能量特征，即可以实现用过去的历史、现在的状态预测围岩未来行为的演化趋势。

根据 Kramarenko 等[1]提出的能量流线及能量流矢量的观点，将能量类比于可压缩流体，可以在固体介质中按一定的规律流动。对于地下爆炸轴对称问题，其应力场、变形场和能量场都是无旋的散度场。此时，岩体内部能量的变化以通量形式反映在爆炸分区边界上，大小等于围岩边界径向应力做功。特征能量因子反映了能量和位移的叠加性，仅通过研究边界上的力学特征，即可确定材料内部的力学状态，这是特征能量因子能够将实际问题化繁为简的基础，是其能够广泛应用于工程实践的根源动力。

下面将从场论的角度给出特征能量因子具有如此特性的物理与数学依据。在此之前，还需要一些说明。现实生活中的工程和物理问题通常是平面或空间问题，因此所研究的对象需要占据一定的区域。该区域内部的物理力学信息往往是未知的，而区域暴露在外的边界（曲线或曲面）上的物理特征则是已知的或可量测的。为了方便求解区域内部未知的特征量，数学家和物理学家尝试建立区域内部特

征量与边界特征量之间的定量关系，这就是高斯公式和斯托克斯公式之所以被提出的历史背景。其实，上述处理问题的思想已被广泛运用，例如：材料力学中为了方便求解研究对象的内力通常会选取隔离体，使其内部的力学特征暴露在人为“切割”出的边界上，然后通过改变截面的位置得到研究对象内部所有的力学信息。

当然，高斯公式和斯托克斯公式的数学证明更加巧妙，利用了矢量微积分的概念与运算规则，建立了区域与边界之间的密切联系，为研究各种复杂物理现象提供了强大的数学工具。高斯公式表明：向量场通过封闭曲面的通量等于其散度在封闭曲面所围闭区域上的积分。斯托克斯公式则表明：向量场沿有向闭曲线的环流量等于其旋度通过曲面的通量。而场论告诉我们，任一向量场都可以表示为一个无旋的散度场和一个无散的旋度场的叠加。因此，区域内部的物理特征可以完全通过边界上相对应的物理量表征。

至此，可能有人会疑惑此种对应关系是否是唯一的。如果边界条件确定，那么这种对应关系具有唯一性。为了便于读者理解，作者仅从弹性力学观点，利用弹性力学解的唯一性[15]，对上述结论加以简单说明。

对于弹性力学问题，其平衡方程、几何方程和本构方程是固定不变的，而唯一变化的只有边界条件，因此边界条件控制着弹性力学问题的解（即区域内物理场的分布），这也是弹性力学问题常被称为弹性边值问题的原因。弹性力学问题解的唯一性定理表明：当边界条件发生改变，区域内物理场的分布亦随之发生变化；而当区域内的物理场因某种原因（如温度变化）改变时，这种变化同样会反映在边界上，且这种相互作用关系是一一对应的。

在推广和应用特征能量因子之前，还需要明确特征能量因子的适用范围。特征能量因子 k 的量纲为应变的平方，且与径向位移 u_r 成线性关系。因此可以发现，在准静力加载条件下，特征能量因子判据与变形（应变或位移）破坏条件完全等价。

但是，特征能量因子绝不只是位移或应变判别准则的另一种表现，其优势主要体现在以下几个方面：

（1）特征能量因子为标量，具有简单的可加性，因此，其上述特点在塑性加载阶段同样存在[16]；

（2）结合统计物理的观点，对微振动取平均化，将扰动场的作用量化为等效势能，再采用特征能量因子可以量化扰动场引起的势能涨落[17-18]；

（3）分别计算准静力场和扰动场的特征能量因子，再利用能量的可加性，即可量化动静荷载的组合作用[17-18]；

（4）结构多次扰动累计失稳或破坏的物理机理尚不明确，可采用特征能量因子量化每一次扰动，然后进行累计叠加，可从能量角度揭示结构扰动累计失稳或破坏的物理机理[19-20]。

当然，特征能量因子除上述优点之外也存在某些局限。由其定义可知，特征能量因子的提出是一种平均化的思想，因此可准确预测规模较大或破坏区域明确的工程灾害（如地下爆炸、围岩大变形以及分区破裂化[13, 16-18] 或摆型波、矿柱剪切滑移型岩爆[19-21]），但对于高度局部化且破坏区域未知的工程灾害（如应变型岩爆）的适用性仍需进一步研究。

2　理想流体空穴湮灭的能量汇问题

从能量流动的角度来看，“能量源”和“能量汇”是一组对立统一的问题，如图 3 所示。特征能量因子的特点以及“能量源”和“能量汇”物理学的相似性促使作者考虑是否同样存在着一个可以描绘能量汇“向心汇聚”问题的无量纲能量因子。

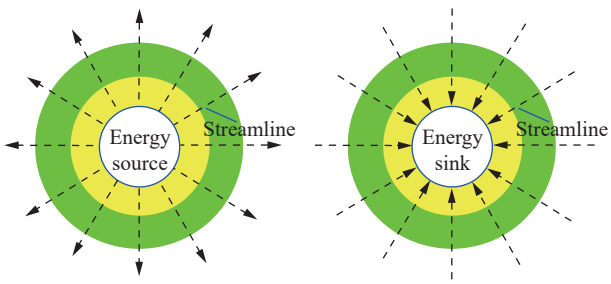

图 3　“能量源”和“能量汇”问题示意图

Fig. 3　Configuration for energy source and energy sink

2.1　空穴湮灭问题的描述

如图 4 所示，在均匀远场压力 p_0 作用下一个充满不可压缩理想流体的无限空间中，在

t=0 时刻流体内部突然形成了一个半径为 a 的真空球形空穴。此时整个区域内流体的初始速度以及作用于空穴表面的内压力均为零，求空穴湮灭需要的时间[22]。

空穴形成后液体的流动是球对称的，且每点的速度均指向空穴中心。球形空穴湮灭的过程中伴随着能量聚集，能量以径向力做功的形式由无穷远处向空穴汇聚，形成了典型的“能量汇”问题。Rayleigh 利用能量守恒定律，第一次得到了理想不可压缩流体中球形空穴径向运动的解析式[23]。具体推导过程如下。

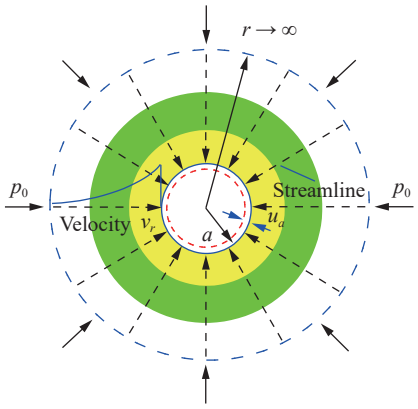

图 4　流体空穴湮灭问题的径向剖面图

Fig. 4　Configuration for cavity annihilation in fluid

球面坐标下的连续性方程：

$$r^2 v_r = R^2 v_R \tag{8}$$

式中：v_r 为距球形中心半径为 r 处流体的径向速度，R 为空穴半径（a 为空穴半径 R 的初始值，故 $R\leqslant a$），v_R 为空穴边界处的径向速度。

假设流体的密度为 ρ，积分可得整个区域内流体的总动能：

$$E = \int_R^{\infty} \frac{1}{2}\rho v_r^2 \mathrm{d}V = 2\pi\rho v_R^2 R^3 \tag{9}$$

在空穴半径由 a 变为 R 的过程中，由于无穷远处的液体压强 p_0 为定值且液体体积不可压缩，故无穷远处液体压强 p_0 做功为：

$$W_0 = \int_{r-\Delta r}^{r} 4\pi p_0 r^2 \mathrm{d}r = p_0 \Delta V \tag{10}$$

式中：$\Delta V = 4\pi p_0 (a^3 - R^3)/3$ 为球形空穴的体积变化量。

根据能量守恒定律可得：

$$v_R = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2p_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)} \tag{11}$$

对式(11)积分可得空穴湮灭的时间：

$$t_0 = \sqrt{\frac{3\rho}{2p_0}} \int_0^a \frac{\mathrm{d}R}{\sqrt{a^3/R^3 - 1}} \tag{12}$$

Rayleigh 使用的方法非常简单仅通过能量平衡即可描述理想流体球形空穴湮灭问题，但是推导过程中使用的物理假设和数学方法并不严密。朗道[22] 通过流体运动方程在数学上严格求解了空穴湮灭问题，并证明了 Rayleigh 结果的正确性。但是，两者并未揭示空穴湮灭过程中能量平衡关系以及能量的调整与传递过程。

2.2　空穴湮灭问题中的能量平衡关系

空穴形成的瞬间，原有的力学和能量平衡状态被打破，在空穴边界形成了一个不平衡力场和势能场。在不平衡力场和势能场的作用下，液体向空穴中心流动，此时作用于空穴边界上的不平衡力为：

$$F = 4\pi R^2 p_0 \tag{13}$$

如果取无气泡时液体的初始势能为零，当半径为 a 的气泡在液体中形成的瞬间，液体的势能 E_p 等于远场压力 p_0 与空穴体积 $V_0 = 4\pi a^3/3$ 的乘积：

$$E_\mathrm{p} = 4\pi p_0 a^3/3 \tag{14}$$

且势能 E_p 的大小与气泡的形状及其所处区域内压力的分布无关。

为了便于理解可做如下解释，设想在一个无限空间中充满了压强为 p_0 的液体，该空间中有一足够大的圆形容器（容器中也充满了压强为 p_0 的液体），容器唯一的出口由面积为 S 的可移动活塞封闭，如图 5 所示。

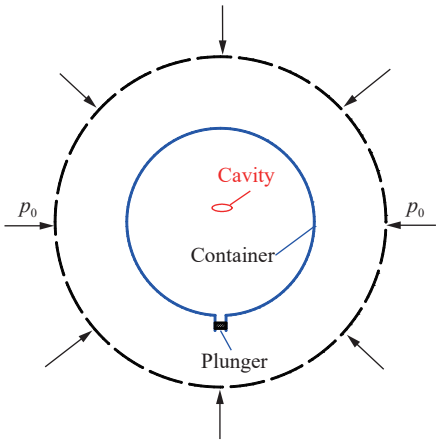

图 5　空穴湮灭能量调整示意图

Fig. 5　The configuration for energy adjustment

当充满液体的圆形容器中形成了一个体积为 Ω 的空穴时，液体将向空穴中心移动。在液体充满空穴的过程中，由于液体的不可压缩性，活塞将被挤入一段距离 l，且 $\Omega = lS$。此时空腔外部液体对活塞所做的功等于 $p_0\Omega$，仅由远处液体处的压力 p_0 与空腔体积 Ω 决定，而不依赖于气泡的形状及其周围的压力分布。需要特别说明一下，该结论仅适用于不可压缩流体，对于固体材料势能的增量则依赖于工程的形状及其周围的压力分布[24]。

当球形空穴半径变化到 R 时，液体的动能和势能分别为：

$$E_{\mathrm{k}} = \int_R^{\infty} \frac{1}{2}\rho v_r^2 \mathrm{d}V = 2\pi\rho v_R^2 R^3 \tag{15}$$

$$E_{\mathrm{p}} = \frac{4}{3}\pi p_0 R^3 \tag{16}$$

根据能量守恒定律：

$$E_{\mathrm{total}} = 2\pi\rho v_R^2 R^3 + \frac{4}{3}\pi p_0 R^3 = \frac{4}{3}\pi p_0 a^3 \tag{17}$$

于是，可得：

$$v_R = \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t} = \sqrt{\frac{2P_0}{3\rho}\left(\frac{a^3}{R^3} - 1\right)} \tag{18}$$

2.3　空穴湮灭问题中能量的转化与传递

研究湮灭过程中能量的转化和传递，对于理解“能量汇”问题具有重要意义。当空穴半径由 a 变为 R 时，液体势能的变化量为：

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = \frac{4}{3}\pi p_0 \left(R^3 - a^3\right) \tag{19}$$

由于无穷远处的液体压强 p_0 为定值且液体体积不可压缩，所以在空穴半径由 a 变为 R 的过程中，无穷远处的液体压强 p_0 做功为：

$$W_0 = \int_{r-\Delta r}^{r} 4\pi p_0 r^2 \mathrm{d}r = 4\pi p_0 r^2 \Delta r = p_0 \Delta V \tag{20}$$

式中：$\Delta V = 4\pi p_0 (a^3 - R^3)/3$。故式（20）可化为：

$$W_0 = \int_{r-\Delta r}^{r} 4\pi p_0 r^2 \mathrm{d}r = \frac{4}{3}\pi p_0 \left(R^3 - a^3\right) \tag{21}$$

比较式（19）、（21）可以发现，液体势能的变化量等于无穷远处液体压力所做的功。这表明空穴形成后液体增加的势能本质上是远处液体通过径向力做功输入的潜在能量。由于理想流体没有黏性且不可压缩，所以由无穷远处输入的能量既不能以弹性能的形式储存在流体中，也不能因摩擦等因素耗散掉，输入的能量将转化为液体的动能，实现了势能和动能之间的完全转化。

设想空穴形成的瞬间，在空穴的内表面产生了一个大小为 p_1（$0 \leqslant p_1 \leqslant p_0$）的压力，方向沿半径向外，此时作用于空穴上的不平衡力为：

$$F_1 = 4\pi R^2 (p_0 - p_1) \tag{22}$$

由式(14)可知液体的势能，即空穴边界的势能为：

$$E_{\mathrm{p}0} = 4\pi (p_0 - p_1) a^3/3 \tag{23}$$

在空穴半径由 a 变为 R 的过程中，不平衡力 F_1 与内压力 p_1 做的功分别为：

$$W = \int_a^R F_1 \mathrm{d}u_a = \frac{4}{3}\pi (p_0 - p_1)\left(a^3 - R^3\right) \tag{24}$$

$$W_1 = \int_a^R -4\pi p_1 r^2 \mathrm{d}u_a = -\frac{4}{3}\pi p_1 \left(a^3 - R^3\right) \tag{25}$$

式中：u_a 为 $r = a$ 处的径向位移。

根据动能定理可知，流体增加的动能为远场压力 p_0 做功与内压力 p_1 做功之差，即：

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = W_0 - W_1 = \frac{4}{3}\pi (p_0 - p_1)\left(a^3 - R^3\right) = W \tag{26}$$

于是可以得到一个重要的结论：空穴上不平衡力做功 W 等于流体动能的变化量。

此时，流体的势能为：

$$E_{\mathrm{p}1} = 4\pi (p_0 - p_1) R^3/3 \tag{27}$$

势能的变化量为：

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = \Delta E_{\mathrm{p}1} - \Delta E_{\mathrm{p}0} = 4\pi (p_0 - p_1)\left(R^3 - a^3\right)/3 \tag{28}$$

比较式(26)、(28)可知，流体减少的势能完全转化为动能，满足能量守恒定律。

由式(22)～(28)可知，当空穴壁内压力 p_1 为零时，无限远处液体做功输入的能量即液体减少的势能，将通过径向压力做功向空穴汇集，最后由空穴壁上的不平衡力做功释放出去并完全转化为液体的动能；当作用于空穴壁上的内压力 p_1=p_0 时，空穴壁上的不平衡力为零，处于平衡状态。无限远处液体输入的能量将全部用于抵抗内压力做功，液体减少的势能将不会转化为动能；当内压力 p_1 介于零和 p_0 之间时，液体减少的势能除一部分用于抵抗内壁压力做功外，剩余部分将通过不平衡力做功释放且转化为液体动能，此时势能转化为动能的效率则取决于内压力 p_1 与远场压力 p_0 的比值。

当 $u_a/a \ll 1$ 时，式(24)～(28)可分别化为如下形式：

$$W_0 = \int_{r-\Delta r}^{r} 4\pi p_0 r^2 \mathrm{d}r = p_0 \Delta V = 4\pi a^2 p_0 u_a \tag{29}$$

$$W = \int_a^R F_1 \mathrm{d}u_a = 4\pi a^2 (p_0 - p_1) u_a \tag{30}$$

$$W_1 = \int_a^R -4\pi p_1 r^2 \mathrm{d}u_a = p_1 \Delta V = -4\pi a^2 p_1 u_a \tag{31}$$

$$\Delta E_{\mathrm{k}} = W_0 - W_1 = 4\pi a^2 (p_0 - p_1) u_a \tag{32}$$

$$\Delta E_{\mathrm{p}} = -4\pi a^2 (p_0 - p_1) u_a \tag{33}$$

可以发现，此时所有的功和能量都正比于空穴壁的径向位移 u_a，能量的可加性通过位移的可加性表现。

2.4　理想流体空穴湮灭的能量汇因子

理想流体空穴湮灭过程中，势能转化为动能的效率取决于内压力 p_1 与远场压力 p_0 的比值，大小则等于空穴边界不平衡力做功。类比于地下爆炸能量源问题中的特征能量，空穴边界上不平衡力沿径向位移所做的功可以作为“能量汇”问题的特征能量。故描述“向心汇聚”问题对应的特征能量因子可表示为：

$$k = \frac{W}{Mc_{\mathrm{P}}^2} = \frac{p_0 - p_1}{\rho c_{\mathrm{P}}^2}\left(1 - \frac{R^3}{a^3}\right) \tag{34}$$

式中：特征能量因子 k 的量纲为应变的平方，取值依赖于流体性质、荷载条件以及空穴的几何特征。

当 $u_a/a << 1$ 时，式(34)可化为：

$$k = \frac{W}{Mc_{\mathrm{P}}^2} = \frac{3(p_0 - p_1)}{\rho c_{\mathrm{P}}^2}\frac{u_a}{a} = \lambda\frac{u_a}{a} \tag{35}$$

式中：$\lambda=3(p_0-p_1)/\rho c_{\mathrm{P}}^2$，当压力与液体性质确定时 λ 为常数。此时，特征能量因子 k 与空穴径向位移 u_a 成线性关系。

“能量汇”问题中的特征能量因子包含了汇聚能量、空穴的几何特征以及流体的力学性质，故可以很好地表征“汇聚”特性。特征能量因子可为“向心汇聚”问题的研究提供了一个全新的思路。

3　结　论

本文主要以地下爆炸和理想流体空穴湮灭为例引出了“能量源”和“能量汇”问题，并初步分析了“能量源”和“能量汇”问题中的特征能量。详细讨论了理想流体空穴湮灭问题中能量的平衡关系与调整机制，建立了应力做功与能量汇聚、传递和转化的关系。引入了描述空穴湮灭“向心汇聚”问题的特征能量因子，为之后地下硐室开挖问题的研究奠定了理论基础。主要结论如下：

(1) 分析了空穴湮灭过程中能量的平衡关系以及能量的转换与传递，提出了理想流体“能量汇”问题的特征能量因子，特征能量因子的引入可以避免传统连续介质力学中复杂的应力应变关系、边界条件以及材料未知的内部结构，在很大程度上简化了问题的难度；

(2) 特征能量因子主要适用于预测规模较大或破坏区域明确的工程灾害(如地下爆炸、围岩大变形以及分区破裂化或摆型波、矿柱剪切滑移型岩爆)，但对于高度局部化且破坏区域未知的工程灾害(如应变型岩爆)的适用性仍需进一步研究；

(3)“能量汇”特征能量因子包含了汇聚能量、空穴的几何特征以及流体的物理性质等信息，故可以很好地表征能量的“汇聚”特性，为之后研究地下硐室开挖的“能量汇”问题奠定了理论基础。

参考文献：

[1] KRAMARENKO V I, REVUZHENKO A F. Flow of energy in a deformed medium [J]. Soviet Mining, 1988, 24(6): 536–540. DOI: 10.1007/BF02498611.

[2] REVUZHENKO A F, KLISHIN S V. Energy flux lines in a deformable rock mass with elliptical openings [J]. Journal of Mining Science, 2009, 45(3): 201–206. DOI: 10.1007/s10913-009-0026-5.

[3] 钱七虎, 王明洋. 岩土中的冲击爆炸效应 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2010: 127–134.
QIAN Q H, WANG M Y. Impact and explosion effects in rock and soil [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2010: 127–134.

[4] ADUSHKIN V V, SPIVAK A. Underground explosions [M]. Lexington, MA: Weston Geophysical Corp, 2015: 431–480.

[5] SADOVSKY M A, VOLKHOVITINOV L G, PISARENKO V F. Deformation of geophysical medium and seismic process [M]. Moscow: Science Press, 1987: 40–240.

[6] KURLENYA M V, OPARIN V N. Problems of nonlinear geomechanics. Part Ⅱ [J]. Journal of Mining Science, 2000, 36(4): 305–326. DOI: 10.1023/A:1026673105750.

[7] 王明洋, 李杰, 李凯锐. 深部岩体非线性力学能量作用原理与应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2015, 34(4): 659–667. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2015.04.002.
WANG M Y, LI J, LI K R. A nonlinear mechanical energy theory in deep rock mass engineering and its application [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2015, 34(4): 659–667. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2015.04.002.

[8] SHISHKIN N I. Seismic efficiency of a contact explosion and a high-velocity impact [J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 2007, 48(2): 145–152. DOI: 10.1007/S10808-007-0019-6.

[9] HASKELL N A. Analytic approximation for the elastic radiation from a contained underground explosion [J]. Journal of Geophysical Research, 1967, 72(10): 2583–2587. DOI: 10.1029/JZ072i010p02583.

[10] SHISHKIN N I. On the problem of the disintegration of rock by an explosion under the influence of a free surface [J]. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics, 1981, 22(3): 401–408. DOI: 10.1007/bf00907569.

[11] 钱七虎. 岩石爆炸动力学的若干进展 [J]. 岩石力学与工程学报, 2009, 28(10): 1945–1968. DOI: 10.3321/j.issn:1000-6915.2009.10.001.
QIAN Q H. Some advances in rock blasting dynamics [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2009, 28(10): 1945–1968. DOI: 10.3321/j.issn:1000-6915.2009.10.001.

[12] 蒋海明. 深部岩体动力特征响应的理论与实验研究 [D]. 南京: 陆军工程大学, 2018: 28–29.

[13] 王明洋, 李杰. 爆炸与冲击中的非线性岩石力学问题Ⅲ: 地下核爆炸诱发工程性地震效应的计算原理及应用 [J]. 岩石力学与工程学报, 2019, 38(4): 695–707. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2018.1078.
WANG M Y, LI J. Nonlinear mechanics problems in rock explosion and shock. Part Ⅲ: the calculation principle of engineering seismic effects induced by underground nuclear explosion and its application [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2019, 38(4): 695–707. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2018.1078.

[14] 倪汉根, 刘亚坤. 水工建筑物的空化与空蚀 [M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2011: 1–3.
NI H G, LIU Y K. Cavitation and cavitation damage of Hydraulic structures [M]. Dalian: Dalian University of Technology Press, 2011: 1–3.

[15] 杨桂通. 弹性力学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003: 60–64.

[16] 王明洋, 陈昊祥, 李杰, 等. 深部巷道分区破裂化计算理论与实测对比研究 [J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(10): 2209–2218. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2018.0458.
WANG M Y, CHEN H X, LI J, et al. Theoretical research on zonal disintegration of rock masses around deep tunnels and comparisons with in-situ observations [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(10): 2209–2218. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2018.0458.

[17] 徐天涵, 李杰, 王明洋, 等. 地下核爆诱发工程性地震实测数据分析与不可逆变形范围计算 [J]. 爆炸与冲击, 2019, 39(12): 121101. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0505.
XU T H, LI J, WANG M Y, et al. Analysis of test data of underground nuclear explosions and calculation of irreversible deformation range [J]. Explosion and Shock Waves, 2019, 39(12): 121101. DOI: 10.11883/bzycj-2018-0505.

[18] 陈昊祥, 王明洋, 李杰. 深部岩体变形破坏的特征能量因子与应用 [J]. 爆炸与冲击, 2019, 39(8): 081103. DOI: 10.11883/bzycj-2019-0191.
CHEN H X, WANG M Y, LI J. A characteristic energy factor for deformation and failure of deep rock masses and its application [J]. Explosion and Shock Waves, 2019, 39(8): 081103. DOI: 10.11883/bzycj-2019-0191.

[19] 李杰, 蒋海明, 王明洋, 等. 爆炸与冲击中的非线性岩石力学问题 (Ⅱ): 冲击扰动诱发岩块滑移的物理模拟试验 [J]. 岩石力学与工程学报, 2018, 37(2): 291–301. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.0684.
LI J, JIANG H M, WANG M Y, et al. Nonlinear mechanical problems in rock explosion and shock. Part Ⅱ: physical model test on sliding of rock blocks triggered by external disturbance [J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2018, 37(2): 291–301. DOI: 10.13722/j.cnki.jrme.2017.0684.

[20] 蒋海明, 李杰, 王明洋. 块系岩体滑移失稳中低摩擦效应的理论与试验研究 [J]. 岩土力学, 2019, 40(4): 1405–1412. DOI: 10.16285/j.rsm.2017.2223.
JIANG H M, LI J, WANG M Y. Theoretical and experimental research on the low-friction effect in slip stability of blocky rock mass [J]. Rock and Soil Mechanics, 2019, 40(4): 1405–1412. DOI: 10.16285/j.rsm.2017.2223.

[21] 陈昊祥. 特征能量因子及其在工程灾变中的应用 [D]. 南京: 陆军工程大学, 2019: 147–154.

[22] 朗道 Л Д, 栗弗席兹 E M. 流体动力学 [M]. 李植, 译. 5 版. 北京: 高等教育出版社, 2012: 3–6.

[23] STRUTT J W. On the pressure developed in a liquid during the collapse of a spherical cavity [M]//STRUTT J W. Scientific Papers. Cambridge: Cambridge University Press, 1920: 504–507. DOI: 10.1017/CBO9780511704017.076.

[24] 陈昊祥, 王明洋, 戚承志, 等. 深部圆形巷道围岩能量的调整机制及平衡关系 [J]. 岩土工程学报, 2020, 42(10): 1849–1857. DOI: 10.11779/CJGE202010010.
CHEN H X, WANG M Y, QI C Z, et al. Mechanism of energy adjustment and balance of rock masses near a deep circular tunnel [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2020, 42(10): 1849–1857. DOI: 10.11779/CJGE202010010.

(责任编辑　曾月蓉)