DOI: 10.11883/bzycj-2024-0488

固支圆板在多次远场空爆载荷下位移响应的理论模型*

郑晓波[1], 赵宏涛[1], 李 腾[1], 姚伟光[1], 宋海生[1], 桂毓林[1], 王 治[2]
(1. 中国工程物理研究院流体物理研究所, 四川 绵阳 621999;
2. 哈尔滨工程大学船舶工程学院, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘要: 针对固支圆板在多次远场空爆载荷下的位移响应问题, 基于膜理论能量方程, 提出一种理论建模方法: 通过将多次空爆载荷简化为线性衰减脉冲序列, 首次建立了考虑应变率强化效应与累积硬化效应的固支圆板位移响应理论模型。首次加载阶段采用线性位移场近似, 后续加载阶段引入二次函数位移场假设, 推导出多次爆炸下中点位移的递推公式。LS-Dyna 二次、三次空爆数值模拟验证表明, 理论解与模拟结果的误差分别为 20%～30% 和 20% 以下。理论模型表明, 圆板中点位移可表征为末次爆炸单独位移与前期累积位移的加权平方根函数, 且后期爆炸的位移增量随前期累积位移增大而减小。

关键词: 多次爆炸; 固支圆板; 累积损伤; 位移场; 远场空爆; 膜理论
中图分类号: O347.3; U674.7 **国标学科代码:** 13015 **文献标志码:** A

A theoretical model of displacement response of clamped circular plate under multiple far-field blast loads

ZHENG Xiaobo[1], ZHAO Hongtao[1], LI Teng[1], YAO Weiguang[1], SONG Haisheng[1], GUI Yulin[1], WANG Zhi[2]
(1. *Institute of Fluid Physics*, *China Academy of Engineering Physics*, *Mianyang* 621999, *Sichuan*, *China*;
2. *College of Shipbuilding Engineering*, *Harbin Engineering University*, *Harbin* 150001, *Heilongjiang*, *China*)

Abstract: Regarding the displacement response of clamped circular plates under multiple far-field blast loads, we proposes a novel theoretical modeling approach based on membrane theory energy equations, by simplifying multiple blast loads into linearly decaying pulse sequences, a theoretical displacement response model for clamped circular plates is established for the first time, considering both strain rate strengthening effects and cumulative hardening effects. The linear displacement field approximation is adopted for the initial loading phase, while a quadratic function displacement field assumption is introduced for subsequent loading phases, deriving recursive formulas for midpoint displacements under multiple blasts. Numerical validations were conducted using LS-DYNA for both double and triple blast scenarios. For double blast cases, theoretical predictions exhibited errors of 20%–30% compared to simulation results, while errors reduced to below 20% for triple blast conditions. The ASTM A415 steel circular plate model was used for the simulations, and the strain rate strengthening effect was described by the Cowper-Symonds model. Finite element models with quadrilateral shell elements demonstrated strong agreement with experimental data (errors＜10%), confirming model reliability. The assumption of quadratic function displacement field for subsequent loading phases was verified by numerical displacement curves of the middle profiles of the plates. Further parametric analysis proved that the theoretical model is effective for different tangent modulus, which represents the strength of the strain strengthening effect. The model reveals that midpoint displacement can be characterized as a weighted

* 收稿日期: 2024-12-17; 修回日期: 2025-03-22
第一作者: 郑晓波(1986—), 男, 博士, 高级工程师, zxb3710@163.com
通信作者: 桂毓林(1973—), 男, 博士, 正高级工程师, guiyulin@21cn.com

square root function combining the final explosion's individual displacement and prior cumulative displacement, with displacement increments from subsequent explosions decreasing as prior cumulative displacement increases.

Keywords: multiple blast; clamped plate; cumulative damage; displacement field; far-field air blast; membrane theory

对于结构在多次爆炸载荷下变形与破坏问题的研究，对舰船毁伤评估和防护结构设计具有重要意义。对于简单板、梁、壳等结构在爆炸载荷下响应的研究已经有数十年历史，许多学者开展了大量的实验与数值模拟研究，并建立了许多理论模型[1]。然而，现有研究主要是针对单次爆炸载荷情况的，目前亟需展开对于多次爆炸载荷条件下结构的变形与破坏特征的研究。Henchie 等[2] 针对圆钢板在重复冲击波载荷下的变形问题开展了实验与数值模拟研究。周游等[3] 通过实验与数值模拟研究了薄壁方管在重复爆炸载荷下的响应。张斐等[4-5] 开展了船用背空钢板及焊接板的多次水下爆炸实验，分析了钢板与焊接板的塑性变形与破坏规律。李旭东等[6] 开展了钢制圆板的多次水下爆炸实验，分析了圆板变形与挠度增长规律。Ziya-Shamami 等[7] 开展了单层和多层金属板在重复脉冲加载下的实验研究，并给出了单层和多层板在重复脉冲载荷下中心变形的经验公式。李锡锋[8] 对多次内爆加载下舰船舱室结构毁伤效应开展了数值模拟研究，并给出了可对多次内爆变形结果快速预测的无量纲毁伤数。Nasiri 等[9] 通过实验和数值模拟研究了铁板在重复水下爆炸载荷下的变形。唐正鹏等[10-11] 通过实验与数值模拟研究了多次水下爆炸载荷下船体梁的累积毁伤问题，分析了炸药当量、爆距、爆炸次数等因素对船体梁累积毁伤效应的影响。Tian 等[12] 研究了固支金属圆板在多次冲击波载荷下的响应，给出了圆板中点位移的经验公式。黄鑫华等[13] 数值研究了多次水下爆炸冲击下典型背空加筋板损伤累积特性与损伤模式演化规律。张文超[14] 采用数值方法对多发武器水下爆炸载荷作用下舰船结构的毁伤特性及冲击环境进行了研究，探讨了二次爆炸对结构毁伤效果最优的药包位置。Li 等[15] 通过实验和数值模拟研究了简化船体梁在多次水下爆炸载荷下的动态响应和累积损伤。

以上研究是通过实验与数值模拟得到结构变形与损伤规律，部分文献在此基础上利用无量纲数等手段给出了预测多次爆炸位移响应的经验公式。然而，目前对于多次爆炸载荷下结构响应尚缺乏理论模型，这制约着对多次爆炸载荷下结构响应与累积损伤问题的深入理解。

本文针对固支圆板在多次远场空爆载荷下的位移响应问题开展理论研究，推导位移场的理论公式，分析多次空爆载荷下结构的变形特征，构建理论模型，并通过数值模拟对理论公式进行验证和修正。

1　理论模型

1.1　理论推导

板在冲击载荷的作用下，当变形较小时，板中的弯矩对位移响应其重要作用，而当变形较大时，对位移响应起到主要作用的是板中的面内拉力（膜力）[1]。由于爆炸载荷较强，其引起板的变形较大，因此本文只考虑板中的拉力。本文所针对的是远场空爆问题，爆炸载荷可以近似认为是均布于圆板的，圆板的边界认为是固支的。根据文献 [1]，对于四周支撑的理想刚塑性圆板，当只考虑膜力时，圆板面内应力的径向与周向分量都等于流动应力，在这一屈服准则下，而其位移响应可以由以下能量方程求解：

$$\int_0^R \left[p(t)-\mu\ddot{w}\right]\dot{w}2\pi r\mathrm{d}r=-N_0\int_0^R w\left[\partial^2\dot{w}/\partial r^2+(1/r)\partial\dot{w}/\partial r\right]2\pi r\mathrm{d}r \tag{1}$$

式中：$p(t)$为圆板上受到的均布载荷，t为时间，μ为板单位面积的质量，w为板的位移，R为板的半径，r为径向坐标，板的中心为坐标原点，N_0为单位宽度上的极限拉力：

$$N_0=\sigma H \tag{2}$$

式中：σ为塑性流动应力，H为板的厚度。

式 (1) 的物理意义较为明确，即外力所做的功转化为板的塑性变形能。文献 [1] 在求解圆板的位移响应时，假设位移场为线性：

$$\dot{w} = \dot{W}(1 - r/R) \qquad 0 \leqslant r \leqslant R \tag{3}$$

式中：W 为圆板中点的位移。本节假设多次空爆中，圆板具有式 (3) 的位移场。将式 (3) 代入式 (1) 进行积分，圆板的运动方程可以写为[1]：

$$\begin{cases} \ddot{W} + a^2 W = 2p(t)/\mu & t \geqslant t_0 \\ W = 0 & t < t_0 \end{cases} \tag{4}$$

式中：t_0 为板塑性变形的起始时刻，即板所受的载荷超过塑性极限载荷的时刻；a 为方程的参数。

$$a^2 = 6N_0/(\mu R^2) \tag{5}$$

由于假设了刚塑性模型，在此时刻之前，板的变形为零。爆炸载荷为瞬态载荷，载荷上升阶段较快，会瞬间超过极限载荷，本文后续采用线性衰减脉冲描述爆炸载荷，因此 t_0 等于加载时刻。

在理想刚塑性假设下，σ 不随时间变化，a 也是常数。但实际材料随着应变的增加具有强化效应，即随着变形的增加，σ 也是变化的，因此本文在理想刚塑性假设下，求解不同加载次数 i 的响应时，将塑性流动应力取为不同的常数 σ_i：

$$a_i^2 = 6H\sigma_i/(\mu R^2) \tag{6}$$

下面求解第 i 次加载阶段的响应（即第 i 次加载开始后、第 i+1 次加载开始前的阶段），假设第 i 次加载时刻为零，第 i 次加载阶段结束时刻为 t_i（也就是第 i+1 次加载开始时刻），第 i 次载荷为 $p_i(t)$，中点位移为 W_i，应用式 (4)，第 i 次加载阶段圆板的运动方程为：

$$\ddot{W}_i + a_i^2 W_i = 2p_i(t)/\mu \qquad 0 \leqslant t < t_i \tag{7}$$

假设后一次爆炸与前一次的时间间隔足以使前一次爆炸引起的变形稳定，则第 i 次加载的初始条件为：

$$W_i(0) = W_{i-1}^{\mathrm{f}}, \qquad \dot{W}_i(0) = 0 \tag{8}$$

式中：W_{i-1}^{f} 为第 i−1 次加载阶段板中心最大位移。

如图 1 所示，本文采用线性衰减函数代替真实爆炸载荷，即第 i 次加载的载荷形式为：

$$\begin{cases} p_i(t) = (1 - t/\tau_i)\, p_i^{\mathrm{m}} & 0 \leqslant t \leqslant \tau_i \\ p_i(t) = 0 & \tau_i < t < t_i \end{cases} \tag{9}$$

式中：p_i^{m} 为第 i 次载荷峰值，τ_i 为第 i 次载荷持续时间。

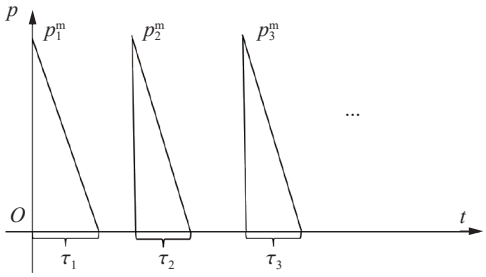


图 1　多次载荷示意图

Fig. 1　Schematic diagram of multiple loads

将式 (9) 代入式 (7) 得到：

$$\begin{cases} \ddot{W}_i + a_i^2 W_i = \dfrac{2}{\mu}\left(1 - \dfrac{t}{\tau_i}\right) p_i^{\mathrm{m}} & 0 \leqslant t \leqslant \tau_i \\ \ddot{W}_i + a_i^2 W_i = 0 & \tau_i < t < t_i \end{cases} \tag{10}$$

以下在式 (8) 的初始条件下对方程 (10) 进行求解。

第一阶段（$0 \leqslant t \leqslant \tau_i$），方程 (10) 的解如下：

$$W_i(t) = \left(W_{i-1}^{\mathrm{f}} - \frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2}\right)\cos a_i t + \frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^3 \tau_i}\sin a_i t + \frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2}\left(1 - \frac{t}{\tau_i}\right) \tag{11}$$

$$\dot{W}_i(t) = \frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2 \tau_i}\cos a_i t + \left(\frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i} - a_i W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)\sin a_i t - \frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2 \tau_i} \tag{12}$$

假设最大位移发生在第一阶段，则

$$\dot{W}_i(t_{\mathrm{f}}) = 0 \tag{13}$$

式中：t_{f} 为达到最大位移的时间。可得：

$$\tan\frac{a_i t_{\mathrm{f}}}{2}=a_i\tau_i-\frac{\mu a_i^3\tau_i W_{i-1}^{\mathrm{f}}}{2p_i^{\mathrm{m}}} \tag{14}$$

求解方程 (14)，若 $t_{\mathrm{f}}<\tau_i$，则最大位移发生在第一阶段。若 $t_{\mathrm{f}}>\tau_i$，则最大位移发生在加载时间外，这种情况下，需要进行第二阶段求解。

第二阶段（$\tau_i<t<t_i$）的初始条件为：

$$W_i(\tau_i)=\left(W_{i-1}^{\mathrm{f}}-\frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2}\right)\cos a_i\tau_i+\frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^3\tau_i}\sin a_i\tau_i \tag{15}$$

$$\dot{W}_i(\tau_i)=\frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2\tau_i}\cos a_i\tau_i+\left(\frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i}-a_i W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)\sin a_i\tau_i-\frac{2p_i^{\mathrm{m}}}{\mu a_i^2\tau_i} \tag{16}$$

第二阶段为在以上初始条件下的自由振动，按照振动理论，其最大位移为：

$$W_i^{\mathrm{f}}=\sqrt{[W(\tau_i)]^2+\left[\dot{W}(\tau_i)/a_i\right]^2} \tag{17}$$

式中：W_i^{f} 为第 i 次加载阶段板中心最大位移。定义载荷比：

$$\eta_i=p_i^{\mathrm{m}}/p_i^{\mathrm{c}} \tag{18}$$

式中：p_i^{c} 为简支圆板的静态极限载荷：

$$p_i^{\mathrm{c}}=6M_{0i}/R^2 \tag{19}$$

式中：$M_{0i}=\sigma_i H^2/4$ 为板的极限弯矩。则式 (17) 写为：

$$W_i^{\mathrm{f}}=\sqrt{\left(\frac{H\eta_i}{2}-W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)^2+2\left(\frac{H\eta_i}{2a_i\tau_i}\right)^2(1-\cos a_i\tau_i)-\frac{H\eta_i}{a_i\tau_i}\left(\frac{H\eta_i}{2}-W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)\sin a_i\tau_i} \tag{20}$$

爆炸载荷为瞬态载荷，其特点为峰值大、载荷持续时间短。对于三角形脉冲，其单位面积冲量为：

$$I_i=p_i^{\mathrm{m}}\tau_i/2 \tag{21}$$

假设冲量 I_i 为有限值，对于瞬态载荷，有 $\tau_i\to 0$，且 $p_i^{\mathrm{m}}\to\infty$。为了获得瞬态载荷下的结构响应，首先将式 (17) 改写为：

$$W_i^{\mathrm{f}}=\sqrt{\left(W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)^2-\frac{8W_{i-1}^{\mathrm{f}}I_i}{\mu a_i}\frac{a_i\tau_i-\sin a_i\tau_i}{a_i^2\tau_i^2}+\frac{16I_i^2}{a_i^2\mu^2}\frac{2-2\cos a_i\tau_i-2a_i\tau_i\sin a_i\tau_i+a_i^2\tau_i^2}{a_i^4\tau_i^4}} \tag{22}$$

在 $\tau_i\to 0$ 的条件下，式 (22) 的极限值为：

$$W_i^{\mathrm{f}}=\sqrt{\left(W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)^2+4I_i^2/a_i^2\mu^2} \tag{23}$$

以上给出了在第 i−1 次爆炸最终位移的初始条件下，第 i 次爆炸位移的求解公式。如果 $W_{i-1}^{\mathrm{f}}=0$，则式 (23) 退化为单次瞬态载荷下圆板最终位移的解。可见，第 i 次爆炸位移并不是在第 i−1 次爆炸位移基础上的线性叠加。对于多次爆炸，通过递推方法则可以求出各次爆炸之后的位移。

1.2　材料的强化效应

板在多次加载过程中，材料存在强化效应，后续加载的初始流动应力与第一次加载的流动应力不同。为了估算强化效应的影响，采用线性强化刚塑性模型，其应力应变曲线如图 2 所示，其中，σ_0 为材料初始的屈服应力，E_{t} 为切线模量，即强化阶段的斜率。第 i−1 次加载后，塑性应变为 ε_{i-1}，此时开始第 i 次加载，则第 i 次加载的初始流动应力为图中的 σ_{0i}。

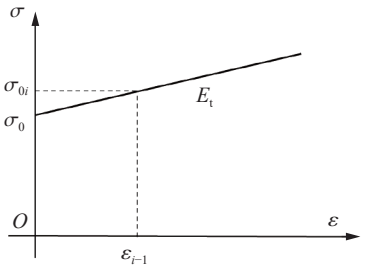


图 2　线性强化刚塑性模型

Fig. 2　Linear strengthening rigid plastic model

在式 (3) 线性运动场的假设下，进一步假设

塑性应变主要发生在板的径向，则第 i-1 次爆炸后板的塑性应变可以通过下式估计：

$$\varepsilon_{i-1}=\left(\sqrt{(W_{i-1}^{\mathrm{f}})^2+R^2}-R\right)\Big/R \tag{24}$$

由图 2 可知，第 i 次爆炸阶段由于应变强化引起的初始屈服应力为：

$$\sigma_{0i}=\sigma_0+E_{\mathrm{t}}\varepsilon_{i-1} \tag{25}$$

1.3　应变率强化效应

板在爆炸过程中处于高应变率状态，而许多材料具有应变率强化效应，在高应变率下的流动应力高于静态屈服应力。式 (6) 中的流动应力不是静态屈服应力，而应该是应变率强化后的流动应力值。由于应变率不断改变，动态流动应力也随时间不断改变。假设应变率强化效应通过 Cowper-Symonds 模型描述，其流动应力表示为：

$$\frac{\sigma}{\sigma_0}=1+\left(\frac{\dot{\varepsilon}}{\dot{\varepsilon}_0}\right)^{1/n} \tag{26}$$

式中：$\dot{\varepsilon}$ 为材料的应变率，$\dot{\varepsilon}_0$ 和 n 为参数。则一种计算瞬态冲击载荷下圆板平均动态流动应力的公式为[1]（此处，文献 [1] 中的原公式被加以下标 i，以适用于多次加载情况）：

$$\sigma_i=\beta_i\sigma_{0i} \tag{27}$$

$$\beta_i=1+\left[\frac{2V_{0i}^2}{3\dot{\varepsilon}_0R}\left(\frac{\rho}{3\sigma_{0i}}\right)^{1/2}\right]^{1/n} \tag{28}$$

式中：$V_{0i}=I_i/\mu$ 为第 i 次瞬态载荷所引起的圆板初始速度，ρ 为材料密度。将式 (27)～(28) 对每次加载使用，则可以得到每次加载阶段的平均流动应力 σ_i，用来计算式 (23) 的位移。

2　理论结果验证

2.1　圆板空爆仿真模型及有效性验证

文献 [16] 报道了圆板在均布瞬态空爆载荷下响应的实验研究，给出了圆板中点位移的测量值。本文建立文献 [16] 中圆板的数值计算模型，并将数值计算结果与实验结果进行对比，以验证数值计算模型的有效性。圆板的材料为 ASTM A415 钢，圆板几何尺寸与钢材的参数见表 1[17]，其中钢材的应变率强化效应通过式 (26) 的 Cowper-Symonds 模型描述。

表 1　圆板尺寸与材料参数[17]

Table 1　Size and material parameters of the circular plate

R/mm	H/mm	ρ/(kg·m^{-3})	$\dot{\varepsilon}_0$/s^{-1}	n	σ_0/MPa	E_{t}/MPa
31.8	1.93	7 800	40	5	223	10.8

本文采用 LS-DYNA 软件进行数值仿真。文献 [17] 通过 LS-DYNA 对文献 [16] 的实验进行了数值模拟，采用壳单元建立板的有限元模型，并指出 0.5 mm 的网格尺寸已经足够小。本文采用 4 节点壳单元建模，网格尺寸约为 0.45 mm。由于圆板的对称性，建立 1/4 模型，如图 3 所示。板的外边界施加固支边界条件。

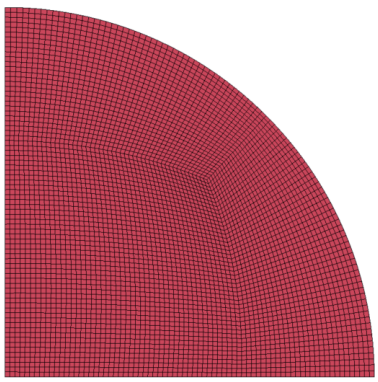


图 3　圆板空爆仿真有限元模型

Fig. 3　Finite element model for the circular plate under blast loads

材料采用*MAT_PLASTIC_KINEMATIC 关键字描述，这个关键字采用了双线性本构模型，能够反映材料弹性模量 E 和切线模量 E_{t}，并采用了式 (26) 的应变率模型，材料参数见表 1。

实验中给出了圆板所受的瞬态冲量 I_t，模拟中假设施加的载荷为线性衰减脉冲，其峰值与持续时间分别为 p^m 和 τ，则 $I_t=\pi p^m \tau R^2/2$，同时假设载荷时间很小，以符合实验中瞬态加载的要求，据此在表 2 中设计了对应的载荷峰值和时间。经初步计算，瞬态载荷下此圆板约在 0.1 ms 左右达到最大位移，因此对载荷时间 τ 的取值为 0.01 ms，以模拟瞬态脉冲。载荷采用*LOAD_SHELL_SET 关键字加载。

表 2　实验与数值模拟结果对比

Table 2　Comparison of numerical and experimental results

序号	实验数据[16]		模拟数据				
	I_t/(N·s)	W_f/H	p^m/MPa	τ/ms	W_f/mm	W_f/H	(W_f/H误差)/%
1	7.153	6.36	450.313	0.01	12.16	6.30	−0.94
2	3.145	2.59	197.991	0.01	4.69	2.43	−6.18
3	5.458	5.12	343.605	0.01	8.97	4.65	−9.18
4	5.591	5.05	351.978	0.01	9.22	4.78	−5.35
5	3.176	2.74	199.943	0.01	4.74	2.46	−10.22
6	4.586	4.13	288.709	0.01	7.32	3.79	−8.23
7	7.015	6.38	441.625	0.01	11.91	6.17	−3.29

读取各组模拟结果中圆板的中点位移 W_f，将模拟结果与实验进行比较，如表 2 所示，可见，模拟与实验的误差基本不超过 10%，佐证了数值模型的有效性。

2.2　单次空爆载荷下圆板位移理论解与数值解的比较

单次空爆的理论解在文献 [1] 中介绍，也就是式 (23) 在 $W_{i-1}^f=0$ 情况下的解为：

$$W_i^f=\frac{2I_i}{a_i\mu} \tag{29}$$

对于表 2 所对应的工况，通过式 (29) 计算出理论值，并与数值与实验结果进行比较，如图 4 所示。图 4 中的理论解和实验结果与文献 [1] 一致。可见，理论解在大变形条件下具有一定可信度，且变形越大，理论解与实验结果的相对误差越小。

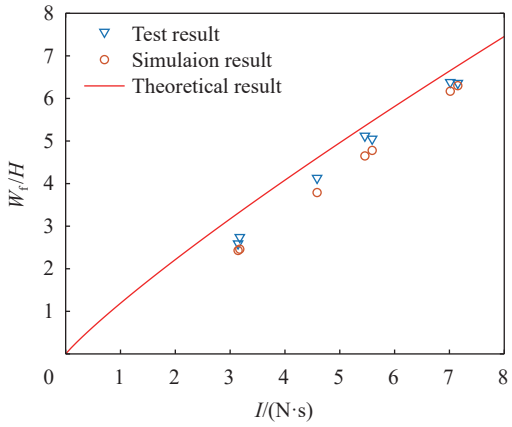


图 4　单次空爆载荷下圆板中点位移的实验、数值模拟与理论结果的对比

Fig. 4　Comparison of theoretical, test, and simulation result of midpoint displacement of the circular plate under single blast loads

2.3　二次空爆载荷下圆板位移理论与模拟结果的比较

如表 3 所示，设计二次空爆模拟工况（3+4 表示第一次加载冲量为 3 N·s，第二次加载冲量为 4 N·s）。二次爆炸的载荷时间都取为 0.01 ms，而超压峰值通过冲量和载荷时间计算，对于 3、4、5、6 N·s 的冲量，载荷峰值分别为 188.863、251.817、314.772、377.726 MPa。本文的二次爆炸计算，并不是通过在第一次加载计算后中断计算、然后在第二次加载时重启计算完成的，而是通过将载荷设为如图 1 的时域连续三角函数实现的，并在一次 Dyna 运算中完成，因此，第一次加载运动结束后的圆板应力状态自动成为第二次加载的初始条件，这样可以反映第一次爆炸后板内残余应力与塑性应变对二次爆炸的影响。

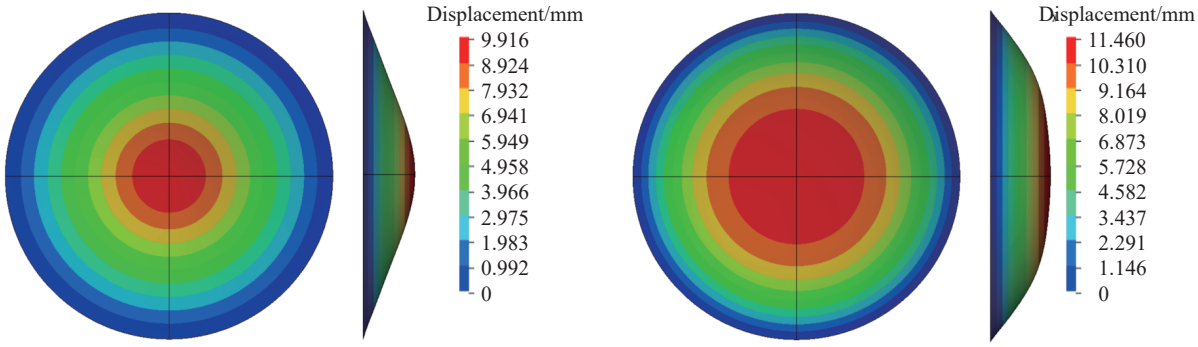
图 5 展示了 6 N·s+6 N·s 冲量组合情况下圆板的位移场。图 6 展示了不同工况下圆板中心位移的时间曲线。对各个工况圆板中心位移进行读取，并将模拟结果与理论结果进行比较，如表 3 所示。如图 6

所示，在第 1 次和第 2 次加载后，位移都会出现震荡，这是由于弹性振动所导致的，因此，在读取第 1 次和第 2 次加载后的位移时，选取振动稳定后的位移数据进行算数平均，以消除振动对最终位移的影响。由表 3 可见，二次爆炸最大位移的理论值与模拟值的误差较大，主要在 30%～40%，因此下面将理论方法进行修正。

表 3　二次空爆载荷下圆板中点位移理论与模拟结果的比较

Table 3　Comparison between theoretical and numerical results of midpoint displacement of the circular plate under two blast loads

冲量/(N·s)	W_1^f/mm		W_1^f误差/%	W_2^f/mm			W_2^f误差/%	
	模拟	理论		模拟	理论	修正理论	理论	修正理论
3+3	4.43	6.12	38.15	5.49	8.65	7.65	57.56	39.34
3+4	4.43	6.12	38.15	6.37	9.97	8.50	56.51	33.44
3+5	4.43	6.12	38.15	7.72	11.36	9.43	47.15	22.15
3+6	4.43	6.12	38.15	9.25	12.77	10.40	38.05	12.43
4+3	6.24	7.88	26.12	6.95	9.97	9.11	43.45	31.08
4+4	6.24	7.88	26.12	7.50	11.14	9.84	48.40	31.20
4+5	6.24	7.88	26.12	8.30	12.39	10.65	49.28	28.31
4+6	6.24	7.88	26.12	9.43	13.70	11.52	45.28	22.16
5+3	8.10	9.57	18.02	8.62	11.36	10.61	31.67	23.09
5+4	8.10	9.57	18.02	8.94	12.39	11.24	38.59	25.73
5+5	8.10	9.57	18.02	9.34	13.53	11.95	44.75	27.94
5+6	8.10	9.57	18.02	10.11	14.74	12.73	45.70	25.91
6+3	9.99	11.22	12.11	10.47	12.77	12.10	21.87	15.57
6+4	9.99	11.22	12.11	10.74	13.70	12.66	27.47	17.88
6+5	9.99	11.22	12.11	11.09	14.74	13.30	32.82	19.93
6+6	9.99	11.22	12.11	11.50	15.85	14.00	37.74	21.74



(a) Displacement field after the first loading　　(b) Displacement field after the second loading

图 5　6 N·s+6 N·s 冲量组合加载条件下圆板位移场

Fig. 5　Displacement field of circular plate under 6 N·s+6 N·s impulse combination

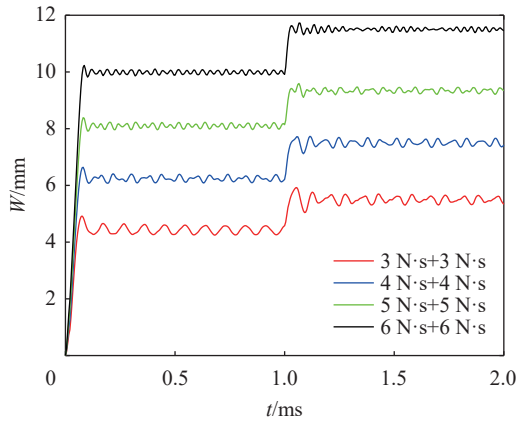


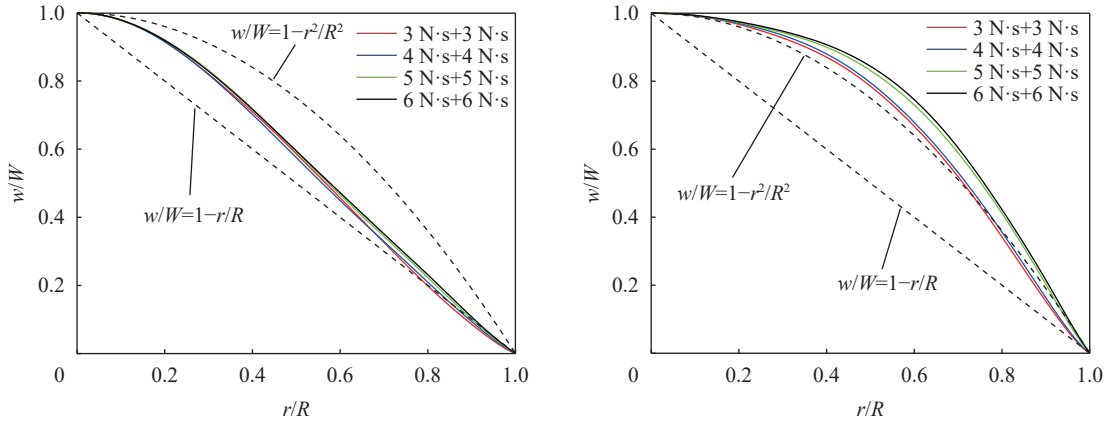
图 6　不同冲量组合加载条件下圆板中点位移时间曲线

Fig. 6　Time curves of midpoint displacement of the circular plate under different impulse combinations

3　理论修正

3.1　修正的理论公式

如前所述，对于二次空爆，圆板中心位移的理论与模拟结果误差较大。可能造成误差的因素较多，其中之一是对位移场的假设。在前面的理论公式中，假设了线性的位移场，但由图 5 可见，在第 1 次爆炸过后，位移场接近线性，而在二次爆炸之后，位移场与线性假设偏差较大。为了更好的分析位移场的形式，选取典型二次爆炸载荷并提取其中剖面曲线，如图 7 所示。可以看出，在单次爆炸条件下，不同药量引起的位移场的归一化曲线较为接近，无论采用线性位移场还是二次函数位移场，都有一定差异，但线性位移场与变形曲线较为接近；但在二次爆炸后，对于位移场的线性假设偏离实际情况较大，而二次函数假设与实际情况较为接近。因此，对于后续爆炸，可以考虑采用二次函数对位移场进行近似。



(a) After the first loading　　(b) After the second loading

图 7　典型二次空爆载荷下圆板中剖面位移曲线比较图

Fig. 7　Comparison of displacement curves of middle profile of the circular plate under typical two blast loads

为了对理论进行修正，将位移场假设为如下形式：

$$\dot{w} = \dot{W}\left(1 - r^2/R^2\right) \tag{30}$$

仍从式 (1) 出发，采用式 (30) 的位移场，则运动方程式 (4) 成为如下形式：

$$\begin{cases} \ddot{W} + a^2 W = 3p(t)/(2\mu) & t \geqslant t_0 \\ W = 0 & t < t_0 \end{cases} \tag{31}$$

式 (31) 与式 (4) 具有相同的形式，只是载荷的系数不同，因此从第 1 节的后续推导可得式 (31) 的解。这里特别地，将式 (23) 的修正形式写出：

$$W_i^{\mathrm{f}} = \sqrt{\left(W_{i-1}^{\mathrm{f}}\right)^2 + 9I_i^2/(4a_i^2\mu^2)} \tag{32}$$

采用修正后的式 (32) 重新计算表 3 中的二次空爆工况，修正理论的计算结果仍列于表 3。可见，采用修正后的理论公式后，计算误差为 20%～30%。

比较式 (23) 和式 (32) 可以看出，圆板多次空爆的中点位移可以表示为最后一次加载单独引起的位

移与之前加载的累积位移的函数，是二者加权平方和的平方根，加权系数与假设位移场的形式有关。通过公式不难发现，后一次加载引起的位移增量小于该载荷单独加载引起的位移，且这一增量的大小与之前加载的累积位移有关，之前加载的累积位移越大，则后一次加载引起的位移增量越小。

3.2　三次空爆载荷下圆板位移理论解与数值解比较

设计三次空爆仿真工况如表 4 所示。三次爆炸的载荷时间都取为 0.01 ms，对于 3、4、5、6 N·s 的冲量，载荷峰值分别为 188.863、251.817、314.772、377.726 MPa。材料仍采用表 1 参数。三次空爆的模拟与理论结果见表 4。可见，理论公式对圆板中点位移预测的误差普遍在 20% 以下。与图 7 类似的，画出第 3 次加载后中剖面位移曲线，如图 8 所示，可以看出三次加载后的中剖面位移曲线也较为接近二次函数。

表 4　三次空爆载荷下圆板中点位移理论与模拟结果的比较（E_t = 10.8 MPa）

Table 4　Comparison between theoretical and numerical results of midpoint displacement of the circular plate under three blast loads (E_t = 10.8 MPa)

冲量/(N·s)	W_1^f/mm		W_1^f 误差/%	W_2^f/mm		W_2^f 误差/%	W_3^f/mm		W_3^f 误差/%
	模拟	理论		模拟	理论		模拟	理论	
3+3+3	4.43	6.12	38.15	5.49	7.65	39.34	6.76	8.92	31.95
4+4+4	6.24	7.87	26.12	7.50	9.84	31.20	9.42	11.48	21.87
5+5+5	8.10	9.56	18.02	9.34	11.95	27.94	11.79	13.94	18.24
6+6+6	9.99	11.20	12.11	11.50	14.00	21.74	15.17	16.33	7.65
4+5+6	6.24	7.87	26.12	8.30	10.65	28.31	11.84	13.57	14.61
4+6+5	6.24	7.87	26.12	9.43	11.52	22.16	12.37	13.57	9.70
5+4+6	8.10	9.56	18.02	8.94	11.24	25.73	12.00	14.03	16.92
5+6+4	8.10	9.56	18.02	10.11	12.73	25.91	11.81	14.03	18.80
6+4+5	9.99	11.20	12.11	10.74	12.66	17.88	12.07	14.55	20.55
6+5+4	9.99	11.20	12.11	11.09	13.30	19.93	12.20	14.55	19.26

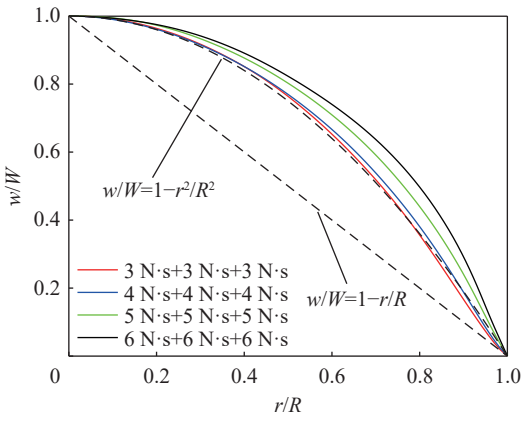


图 8　典型三次空爆载荷下圆板中剖面位移曲线比较图（第 3 次加载后中剖面位移曲线）

Fig. 8　Comparison of displacement curves of middle profile of the circular plate under typical three blast loads. (Displacement curve of the middle profile after the third loading)

3.3　材料切线模量的影响

对于多次爆炸，切线模量 E_t 在理论上对结果会有重要影响。多次爆炸对于板结构进行反复加载，材料经过往复的加载和卸载过程，会得到强化，本文也需要对此效应进行考虑，通过式 (25) 计算强化后的流动应力。为了考察不同切线模量对仿真和理论结果的影响，下面针对较大的切线模量，重新进行三次空爆仿真。其中切线模量 E_t 选为 2 GPa，其余参数与表 1 相同。计算结果如表 5 所示。对比表 5 与表 4，可见在增大切线模量后，第 1 次、第 2 次和第 3 次爆炸后的位移都有所降低。理论公式对三次爆炸最终中点位移的预测误差小于 20%，说明本文对材料强化效应的修正较为有效。

表 5　三次空爆载荷下圆板中点位移理论与模拟结果的比较（$E_t = 2$ GPa）

Table 5　Comparison between theoretical and numerical results of midpoint displacement of the circular plate under three blast loads ($E_t = 2$ GPa)

冲量/(N·s)	W_1^f/mm		W_1^f 误差/%	W_2^f/mm		W_2^f 误差/%	W_3^f/mm		W_3^f 误差/%
	模拟	理论		模拟	理论		模拟	理论	
3+3+3	4.18	5.70	36.36	5.33	7.14	33.96	5.78	8.27	43.08
4+4+4	5.85	7.04	20.34	6.68	8.87	32.78	8.36	10.25	22.61
5+5+5	7.45	8.18	9.80	8.46	10.37	22.58	10.10	11.98	18.61
6+6+6	9.02	9.16	1.55	10.08	11.70	16.07	12.36	13.52	9.39
4+5+6	5.85	7.04	20.34	7.51	9.62	28.10	10.78	12.00	11.32
4+6+5	5.85	7.04	20.34	8.50	10.41	22.47	10.59	12.02	13.50
5+4+6	7.45	8.18	9.80	7.95	9.72	22.26	10.27	12.07	17.53
5+6+4	7.45	8.18	9.80	9.10	11.08	21.76	10.33	12.09	17.04
6+4+5	9.02	9.16	1.55	9.37	10.49	11.95	10.51	12.08	14.94
6+5+4	9.02	9.16	1.55	9.70	11.07	14.12	10.35	12.08	16.71

3.4　关于误差的讨论

由于结构在爆炸载荷下的动力学问题较为复杂，难以获得理论解，因此本文为了获得固支圆板在多次远场空爆载荷下位移响应的理论模型，进行了一系列理论假设。理论与模拟结果的误差来源较为复杂，下面对一些误差的影响因素进行讨论。

(1) 本文理论模型是基于膜力假设，而未考虑板中弯矩，在大变形情况下，膜力为主要因素，而小变形情况下，弯矩的影响会增加。因此，本文理论模型对较小载荷的预报误差会稍大，这通过单次爆炸的图 4 可以直观看出，图 4 中冲量越小，理论与实验值误差越大，这与文献 [1] 一致。同样，对于多次爆炸，较小冲量组合的理论解与仿真值误差偏大（见表 3、表 4 与表 5）。另一方面，较小冲量意味着位移的真值较小，即使各个工况误差的绝对值一样，也会导致较小冲量组合的理论解相对误差较大。

(2) 由图 4 可见，数值模拟结果比实验值偏小，而本文理论结果大多数大于模拟（见表 3、表 4 与表 5）。因此，若以实验值为参考，本文理论结果的误差会更小。

(3) 现在的方法中，对第 1 次爆炸后的位移场采用线性近似，而对二次爆炸后的位移场采用二次函数近似，进一步观察图 7 的位移场，在这两种假设条件下，假设位移曲线与坐标轴围成区域面积都小于仿真位移曲线与坐标轴围成的面积，这会导致理论位移大于实际值，这一点从表 3 的误差分布中可以得到佐证。

4　结　论

本文建立了固支圆板在多次远场空爆载荷下位移响应的理论模型，并通过数值模拟验证了其有效性，主要结论如下。

(1) 针对圆板在多次远场空爆载荷下的位移响应问题，从基于膜理论的能量方程出发，将多次空爆载荷简化为多次线性衰减脉冲，对第一次加载引起的位移场采用线性近似，对第二次加载后的位移场采用二次函数近似，同时考虑了应变率强化效应与多次加载硬化效应对材料流动应力的影响，给出了多次空爆载荷下圆板位移响应的理论解。开展圆板二次、三次空爆仿真，发现理论解对于二次爆炸中点位移理论预测结果与模拟结果误差为 20%～30%，对于三次爆炸中点位移理论预测结果与模拟结果误差大部分小于 20%。

(2) 从理论公式预测，圆板多次空爆的中点位移可以表示为最后一次加载单独引起的位移与之前加载的累积位移的函数，是二者加权平方和的平方根，加权系数与假设位移场的形式有关（式 (23) 和

(32))。后一次加载引起的位移增量小于该加载可单独引起的位移，且这一增量大小与之前加载的累积位移有关，之前加载的累积位移越大，则后一次加载引起的位移增量越小。

由于结构在爆炸载荷下动力学问题的复杂性，本文在得到理论模型的过程中应用了一些假设与简化，因此理论结果与模拟结果存在一定误差。在实际应用中，本文理论方法可以作为对圆板在多次空爆载荷下真实响应的估计，也可以通过理论解初步判断不同空爆组合方式毁伤效果的大小。另一方面，结论 (2) 表明，在实际多次空爆情况下，如果前序爆炸已经对结构造成了一定毁伤，后序爆炸引起的毁伤增益会减小，这意味着简单通过多次爆炸增加结构毁伤的作法可能是不高效的。

参考文献：

[1] JONES N. Structural impact [M]. 2nd ed. New York: Cambridge University Press, 2012.

[2] HENCHIE T F, YUEN S C K, NURICK G N, et al. The response of circular plates to repeated uniform blast loads: an experimental and numerical study [J]. International Journal of Impact Engineering, 2014, 74: 36–45. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2014.02.021.

[3] 周游, 纪冲, 王雷元, 等. 重复爆炸载荷作用下薄壁方管动力响应研究 [J]. 兵工学报, 2019, 40(9): 1871–1880. DOI: 10.3969/j.issn.1000-1093.2019.09.012.
ZHOU Y, JI Y, WANG L Y, et al. Research on the dynamic response of thin-walled square tube under repeated blast loads [J]. Acta Armamentarii, 2019, 40(9): 1871–1880. DOI: 10.3969/j.issn.1000-1093.2019.09.012.

[4] 张斐, 张春辉, 张磊, 等. 多次水下爆炸作用下钢板动态响应数值模拟 [J]. 中国舰船研究, 2019, 14(6): 122–129. DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.01431.
ZHANG F, ZHANG C H, ZHANG L, et al. Numerical simulation of dynamic response of steel plate subjected to multiple underwater explosions [J]. Chinese Journal of Ship Research, 2019, 14(6): 122–129. DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.01431.

[5] 张斐, 张春辉, 张磊, 等. 多次水下爆炸作用下钢板与焊接钢板冲击损伤特性 [J]. 振动与冲击, 2020, 39(7): 196–201. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2020.07.027.
ZHANG F, ZHANG C H, ZHANG L, et al. Impact damage of steel plate and welding steel plate under multiple underwater explosions [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(7): 196–201. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2020.07.027.

[6] 李旭东, 尹建平, 杜志鹏, 等. 多次水下爆炸钢制圆板应变与挠度增长规律分析 [J]. 振动与冲击, 2020, 39(5): 131–136. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2020.05.017.
LI X D, YIN J P, DU Z P, et al. Growth law analysis for strain and deflection of steel circular plates subjected to multiple underwater explosions [J]. Journal of Vibration and Shock, 2020, 39(5): 131–136. DOI: 10.13465/j.cnki.jvs.2020.05.017.

[7] ZIYA-SHAMAMI M, BABAEI H, MOSTOFI T M, et al. Structural response of monolithic and multi-layered circular metallic plates under repeated uniformly distributed impulsive loading: an experimental study [J]. Thin-Walled Structures, 2020, 157: 107024. DOI: 10.1016/j.tws.2020.107024.

[8] 李锡锋. 多次内爆加载下舰船舱室结构毁伤效应研究 [D]. 太原: 中北大学, 2021. DOI: 10.27470/d.cnki.ghbgc.2021.001010.
LI X F. Research on damage effect of ship cabin structure under multiple implosion [D]. Taiyuan: North University of China, 2021. DOI: 10.27470/d.cnki.ghbgc.2021.001010.

[9] NASIRI S, SADEGH-YAZDI M, MOUSAVI S M, et al. Repeated underwater explosive forming: experimental investigation and numerical modeling based on coupled Eulerian-Lagrangian approach [J]. Thin-Walled Structures, 2022, 172: 108860. DOI: 10.1016/j.tws.2021.108860.

[10] 唐正鹏, 李翔宇, 郑监. 多次水下爆炸中船体梁的累积毁伤效应 [J]. 高压物理学报, 2022, 36(2): 025102. DOI: 10.11858/gywlxb.20210809.
TANG Z P, LI X Y, ZHENG J. Cumulative damage effect of hull girder subjected to multiple underwater explosions [J]. Chinese Journal of High Pressure Physics, 2022, 36(2): 025102. DOI: 10.11858/gywlxb.20210809.

[11] 唐正鹏, 李翔宇. 多次水下爆炸对船体梁累积毁伤试验研究 [J]. 水下无人系统学报, 2022, 30(3): 364–370, 377. DOI: 10.11993/j.issn.2096-3920.2022.03.012.
TANG Z P, LI X Y. Experiments on cumulative damage to hull girders subjected to multiple underwater explosions [J].

Journal of Unmanned Undersea Systems, 2022, 30(3): 364–370, 377. DOI: 10.11993/j.issn.2096-3920.2022.03.012.

[12] TIAN W J, ZHAI H B, LIU Y S, et al. A response prediction method for clamped circular plates subjected to repeated blast loading [J]. International Journal of Impact Engineering, 2023, 180: 104684. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2023.104684.

[13] 黄鑫华, 李应刚, 张永峰, 等. 多次水下爆炸下背空加筋板损伤累积特性研究 [J]. 舰船科学技术, 2023, 45(19): 9–16. DOI: 10.3404/j.issn.1672-7649.2023.19.002.
HUANG X H, LI Y G, ZHANG Y F, et al. Research on damage accumulation characteristic of air-backed stiffened plate subjected to multiple underwater explosions [J]. Ship Science and Technology, 2023, 45(19): 9–16. DOI: 10.3404/j.issn.1672-7649.2023.19.002.

[14] 张文超. 多发武器水下爆炸作用下结构毁伤特性及冲击环境研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2022. DOI: 10.27060/d.cnki.ghbcu.2022.001456.
ZHANG W C. Research on structural damage characteristics and impact environment of multiple weapons exploded underwater [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2022. DOI: 10.27060/d.cnki.ghbcu.2022.001456.

[15] LI X Y, LIANG M Z, TIAN Z D, et al. Dynamic response and cumulative damage mechanism of simplified hull girders under repeated underwater explosions [J]. Thin-Walled Structures, 2024, 196: 111554. DOI: 10.1016/j.tws.2023.111554.

[16] BODNER S R, SYMONDS P S. Experiments on viscoplastic response of circular plates to impulsive loading [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1979, 27(2): 91–113. DOI: 10.1016/0022-5096(79)90013-9.

[17] WEI Q Y, WANG Z, SHI D Y, et al. Method based on the membrane theory for equivalence between arbitrarily shaped pressure pulse applied on circular plate and rectangular pressure pulse [J]. International Journal of Impact Engineering, 2023, 179: 104658. DOI: 10.1016/j.ijimpeng.2023.104658.

(责任编辑　王小飞)