爆 炸 与 冲 击
Explosion and Shock Waves
DOI：10.11883/bzycj-2025-0358

活塞驱动的病态爆轰波纵向稳定性研究*

陆乐，许卓，郭则庆，董刚

（南京理工大学瞬态物理全国重点实验室，南京 210094）

摘　要：病态爆轰是一种由于其它物理或化学因素来抵消部分化学反应放热从而不能有效支持爆轰波传播的非理想爆轰，它在实际过程中普遍存在，其传播稳定性研究具有重要意义。为了研究病态爆轰的传播稳定特性，可以通过使用摩尔数减小的单步反应实现其爆轰过程，并采用一维反应性欧拉方程和高精度数值格式，数值模拟一维病态爆轰波纵向传播的振荡不稳定过程，进而系统考察活塞驱动速度和活化能对病态爆轰波稳定性的影响，并分析爆轰波稳定性与其反应区结构变化之间的关系。研究结果表明，在相同的反应放热条件下，病态爆轰比理想爆轰波更不稳定。活塞驱动速度的增加有利于病态爆轰波的稳定，而活化能的增加则不利于病态爆轰波的稳定。过驱病态爆轰的高频低幅振荡其反应区结构变化不大；强解条件下爆轰波的低频低幅振荡是反应区强解的两种构型交替出现导致的；而过驱病态爆轰的低频高幅振荡特性则是由流量发生变化的弱解、强解和过驱解等反应区结构的交替变化所表征的。

关键词：病态爆轰；反应区结构；非线性稳定性；活塞驱动爆轰；数值模拟

中图分类号：O381　　**国标学科代码：**13035　　**文献标识码：**A

Longitudinal stability analysis of piston-driven pathological detonation wave

Lu Le, Xu Zhuo, Guo Zeqing, Dong Gang

(*National Key Laboratory of Transient Physics, Nanjing University of Science and Technology, Nanjing 210094, China*)

Abstract: Pathological detonation is a non-ideal detonation that cannot effectively support the propagation of detonation waves due to other physical or chemical factors offsetting part of the chemical heat release. It is common in the practical processes, and the study on propagation stability of the detonation is of great significance. A single-step global reaction model was adopted to analyze the propagation stability of pathological detonation waves. Reduction of the reactant molar quantity decreased the overall system volume, introducing a negative-work effect that enables the pathological detonation regime. The process was numerically simulated using the one-dimensional reactive Euler equations, which couples chemical energy release with flow-field dynamics. A high-order finite difference method combined with a high-resolution flux-splitting scheme ensured accurate resolution of shock fronts and detailed reaction-zone structures. Parametric variations in piston-driven speed and activation energy were introduced to represent the effects of external mechanical forcing and intrinsic chemical reactivity, respectively. Comparative analyses of temporal evolution across parameter sets revealed the coupling mechanism between piston-driven flow dynamics and chemical kinetics. Further examination of the spatiotemporal distributions of temperature, pressure, and reactant mass fraction elucidated the link between detonation stability and the internal structural evolution of the reaction zone. The effects of piston-driven speed and activation energy on the stability of pathological detonation wave are systematically investigated, and the relationship between the stability of detonation wave and the reaction zone structure is analyzed. The results show that the pathological

*收稿日期：2025-11-03；　修回日期：2025-12-24；
基金项目：国家自然科学基金（12472335）；
第一作者：陆乐（2000－ ），男，博士研究生. lule_phd@qq.com；
通信作者：董刚（1970－ ），男，博士，研究员. gdong@njust.edu.cn。

录用稿件，非最终出版稿

detonation is more unstable than the ideal detonation wave under the same reaction exothermic conditions. The increase of piston-driven speed is beneficial to the stability of the pathological detonation wave, while the increase of activation energy can lead to the instability of the pathological detonation wave. The high-frequency and low-amplitude oscillation of overdriven pathological detonation has little change in the structure of the reaction zone; the low-frequency and low-amplitude oscillation of detonation wave under the condition of strong solution is caused by the alternation of two configurations of strong solution in the reaction zone. The low-frequency and high-amplitude oscillation characteristics of overdriven pathological detonation are characterized by the alternating occurrence of reaction zone structures such as weak solution, strong solution and overdriven solution.

Keywords: pathological detonation; reaction zone structure; nonlinear stability; piston-driven detonation; numerical simulation

引 言

爆轰波是由前导激波与紧随其后的化学反应区耦合形成的高速燃烧波，其自持传播机制依赖于激波压缩与化学放热的正反馈效应。由于可燃预混气体本身的一些特殊热力学和动力学特性（如体积收缩或反应吸热等）或壁面边界层效应（如管壁的摩擦、散热或侧向扩张）等，爆轰波会表现为非理想传播的行为。在这类爆轰波的一维结构中，自持传播的爆轰波波后反应区终止面将落后于声速面，因此反应放热将不能有效用于支持爆轰波的传播，故使得爆轰波的传播速度亏损，从而显著影响爆轰波的稳定性。在实际当中，上述非理想爆轰的现象普遍存在，例如，管道中考虑管壁摩擦效应的爆轰波传播过程[1]，旋转爆轰发动机（RDE）燃烧室中具有侧向膨胀效应的爆轰波传播行为[2-3]，以及特殊可燃系统（如 H_2-Cl_2 系统[4]、铝粉-气态燃料-氧气[5]系统）中的病态爆轰行为等，因此，开展此类爆轰过程的一维稳定性研究具有显著的理论和应用价值。

Fickett 和 Wood[6]首先研究了单步反应条件下的一维气相爆轰波的稳定性，他们发现当爆轰波过驱度较低或活化能较大时，微小扰动可以使爆轰波的峰值压力在稳定解附近发生振荡。Sharpe 和 Falle[7]则进一步研究了在不同大小的活化能影响下一维爆轰波的稳定性。发现较低的活化能影响下的非线性数值模拟结果与线性稳定性分析的结果一致。然而随着活化能的增大，产生非线性扰动，压力振荡将变得更加不规则。然后，他们进一步研究了高活化能下爆轰波起爆和熄爆现象[8]。结果表明，高频振荡会导致局部区域形成未燃气团，使得非线性稳定性分析的爆轰结构与线性稳定性分析存在较大差异。在这种情况下，线性稳定性分析不再起作用。Henrick 等[9]和 Ng 等[10]研究都表明，随着活化能的变化，压力振荡会经历一系列倍周期分岔过程。除了使用简单反应外，也有学者采用详细的反应机理来研究爆轰波的一维稳定性行为。Yungster 等人[11, 12]分别研究了氢气/空气和乙烯/空气介质中爆轰波的稳定性。研究表明，在低过驱度下，爆轰波表现出不稳定性，且波传播的动力学特性会随着当量比的变化而发生变化。当当量比小于 1.2 时，爆轰波呈现出高频低幅的短周期振荡模式；而当当量比大于 1.2 时，则呈现低频高幅的振荡模式。他们的研究还表明，稳定传播和不稳定传播的爆轰波过驱度的阈值会随着初始压力的增加而单调增加，同时随着初始温度的升高而单调下降。Daimon 和 Matsuo[13]通过氢气-空气一维爆轰波的稳定性的研究也得到了相同的结论。Radulescu 等人[14]利用乙炔/氧气反应机理研究了氩气在乙炔/氧气爆轰波中对稳定性的影响。研究表明，当氩气的稀释量较大时，会导致反应区的温度降低，热释放速率减小，从而使反应区结构对温度变化不敏感，波前压力以单一频率和小幅度振荡。随着氩气稀释度的减少，爆轰波变得不稳定，振荡幅度将增大。Han 等人[15]采用氢气/氧气系统进行了不同氩气稀释浓度下的爆轰波传播过程的模拟，观察到了高度不稳定、多周期或单周期脉动不稳定以及稳定的三种不同类型的爆轰波。他们还发现可燃气体积分数越大，爆轰波越不稳定。此外，Han 等人还研究了添加 O_3 对一维不稳定性的影响[16]，发现随着 O_3 浓度的增加，爆轰波变得更加稳定。

上述研究主要针对的是理想爆轰，对于非理想爆轰一维稳定性研究则相对较少。Dionne 等人[1]利用单步反应研究了具有摩擦损失的非理想爆轰的一维非线性不稳定性，发现管壁摩擦力的增加相

录用稿件，非最终出版稿

当于增加了有效活化能，从而使爆轰更加不稳定。Goldin 等人[17]研究表明，在考虑动量损失的气相爆轰波模型中，摩擦系数的周期性变化会导致模态锁定现象。也就是说，调整摩擦系数周期性变化的波长，可以使爆轰速度的振荡形态由不规则转变为规则。Sharpe 和 Falle[18]则使用包含吸热反应的两步连续反应模型，研究了自持和过驱条件下非理想爆轰波的一维稳定性。他们的结果表明，自持爆轰波在扰动作用下更容易熄爆，而过驱爆轰波会出现相互耦合的双激波结构，其中第二道激波可以增强第一道激波，从而维持爆轰波的稳定传播。此外，他们还研究了吸热效应和过驱度对一维非理想爆轰波振荡行为的影响。

爆轰波的一维不稳定特性与爆轰波反应区结构密切相关，但是非理想爆轰波具有更加复杂的反应区结构[19]，而爆轰波的稳定性与其结构的关系目前还未得到很好的解释。因此，本文采用反应摩尔数减小的单步化学反应实现具有病态爆轰性质的非理想爆轰，采用这类反应的目的是利用尽可能简单的化学反应模型来模拟病态爆轰的行为。在此基础上，通过采用爆轰波反应区后边界活塞运动速度来控制爆轰波过驱度以及通过改变反应活化能，研究一维病态爆轰波的非线性纵向稳定性随这两种因素的变化规律，考察典型的不稳定状态与爆轰波结构之间的关系，为理解实际中非理想爆轰波的稳定性提供理论指导。

1 计算模型和网格验证

1.1 病态爆轰的非稳态控制方程和数值方法

本文采用不考虑粘性项的反应性欧拉方程组开展爆轰波传播过程的一维非线性不稳定性的数值模拟研究，以考察爆轰波的一维纵向振荡特性。带单步化学反应的控制方程形式如下：

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}=\mathbf{S} \tag{1}$$

式中，守恒向量 **U**、对流项向量 **F** 以及反应源项向量 **S** 可表示如下：

$$\mathbf{U}=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho U\\ E\\ \rho(1-\lambda)\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}\rho U\\ \rho U^2+p\\ U(E+p)\\ \rho U(1-\lambda)\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ -\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t\end{bmatrix} \tag{1}$$

其中 p 为气体压强，ρ 为气体密度，U 为实验室坐标系下流体质点的速度（沿 x 方向），E 为单位体积气体所具有的总内能。λ代表达反应进度，定义反应起始时λ=0，反应结束时λ=1。对于反应源向量 **S** 中的反应速率$-\mathrm{d}\lambda/\mathrm{d}t$，其表达式为：

$$-\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}=A_{\mathrm{e}}(1-\lambda)\exp\left(-\frac{E_{\mathrm{a}}}{\mathrm{R}T}\right) \tag{2}$$

式中，A_{e}代表指前因子，E_{a}代表活化能，R 为通用气体常数，T 为体系温度。假设气体为量热完全气体，则式（2）中的总内能 E 可表达为：

$$E=\frac{p}{\Gamma(\lambda)-1}+\frac{1}{2}\rho U^2+\rho q(1-\lambda) \tag{3}$$

式中，q 代表化学反应放热；$\Gamma(\lambda)$代表系统的比热比，它是依赖于λ的函数。本文采用了反应摩尔数减小的化学反应，可表达如下：

$$\mathrm{A}\rightarrow(1\text{-}\delta)\mathrm{B}\quad \delta<1 \tag{5}$$

录用稿件，非最终出版稿

式中δ代表的是反应前后组分摩尔数变化比，其值在 0~1 之间变化，当δ>0 时，反应物到产物的过程中摩尔数减少；当δ=0 时，则反应前后的摩尔数不变。令组分 A 和 B 的分子量分别为 W_A 和 W_B，则反应后系统的分子量可表达为：

$$W_A = (1-\delta)W_B \tag{6}$$

令组分 A 和组分 B 有着不同的等压比热 c_{pA} 和 c_{pB}，则反应过程中混合物的平均等压比热 c_p 可表示为：

$$c_p = c_{pA} + \lambda(c_{pB} - c_{pA}) \tag{4}$$

另一方面，对于由组分 A 和 B 组成的二元体系，其体积功可以用质量分数来表示，进而能够得到预混系统的状态方程为：

$$pv = \left(\frac{Y_A}{W_A} + \frac{Y_B}{W_B}\right)\mathrm{R}T = \frac{(1-\delta\lambda)\mathrm{R}T}{W_A} \tag{5}$$

其中，Y_A 和 Y_B 分别代表组分 A 和 B 的质量分数。注意式（8）的第二个等式使用了组分质量分数和反应度λ之间的关系：Y_A=1−λ，Y_B=λ。因此，根据式（7）和式（8），比热比 $\Gamma(\lambda)$的表达式可以写为：

$$\Gamma(\lambda) = \frac{c_p}{c_v} = \frac{c_{pA} + \lambda(c_{pB} - c_{pA})}{c_{pA} + \lambda(c_{pB} - c_{pA}) - (1-\delta\lambda)\mathrm{R}/W_A} \tag{6}$$

其中 c_v 为等容比热。由式（9）可以看出，化学反应摩尔数减少的二元体系中，比热比不仅是λ的函数，也是δ的函数。在本文研究中，固定δ不变（δ=0.5），因此在化学反应进行的过程中，比热比Γ仅随着反应的进行而发生变化。

对式（1）中的对流通量项，本文采用 Lax-Friedrichs 通量分裂方法与五阶 WENO 格式[20]耦合的离散方法进行求解。对化学源项 **S**，采用变阶变步长的 VODE 程序包求解。关于时间推进项，本文采用了显式三阶 Runge-Kutta 时间离散格式，设置库朗数 CFL（Courant-Friedrichs-Lewy）为 0.4，以确保对流-反应耦合系统的时间精度与计算鲁棒性。

本文采用实验室坐标系建立计算模型，设置一维计算域长度为 1000$\Delta_{1/2}$，这里$\Delta_{1/2}$代表相应的爆轰波 ZND 结构中的半反应区长度，即反应完成一半时的反应区长度。初始时刻，在计算域内的左侧置入给定条件下预先计算得到的 ZND 结构的流场，设置其长度为 10$\Delta_{1/2}$，以保证 ZND 结构下游已基本达到反应结束的状态。此时，ZND 结构的下游状态便可作为计算域左端边界条件，而计算域的右端则设定为零梯度边界条件。数值模拟时，爆轰波从 0 时刻的稳态 ZND 结构出发，从左向右运动，在数值误差的扰动下爆轰波很快变为非线性失稳状态，本文通过记录不同时刻下爆轰波阵面压力峰值 p_{max} 来考察爆轰波的一维非线性纵向不稳定特性。

1.2 病态爆轰的 ZND 模型和计算方法

在采用上述数值模拟方法求解反应摩尔数减小的病态爆轰的非线性稳定性特性之前，首先需要对其 ZND 结构进行求解，以便作为数值模拟的初始条件。求解 ZND 结构的控制方程组是式（1）的稳态版，即不考虑时间推进项（∂**U**/∂t）的影响，因此控制方程变为常微分方程组的形式，对稳态形式的式（1）的前三个式子进行重排，并采用激波坐标系，则可以得到如下的形式：

录用稿件，非最终出版稿

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\rho\Sigma}{\eta} \\ \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u\Sigma}{\eta} \\ \dfrac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = -\dfrac{\rho u^2\Sigma}{\eta} \end{cases} \tag{10}$$

其中 u 为激波坐标系下的流体质点运动速度，$\eta=1-M^2$，M 为流体质点的运动马赫数，可表达为 $M=u/a$，这里 a 代表流体质量的当地声速，$a=[\Gamma(\lambda)p/\rho]^{1/2}$。$\Sigma$ 代表反应体系的热性（thermicity），定义为[19]：

$$\Sigma = \sigma\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t} \tag{11}$$

σ 为热性系数，对变摩尔数的化学反应，可以表示为[21]：

$$\sigma = \frac{\alpha_{\mathrm{f}} q}{c_{p\mathrm{A}} + \lambda(c_{p\mathrm{B}} - c_{p\mathrm{A}})} - \frac{\delta}{1-\delta\lambda} \tag{7}$$

其中 α_{f} 为膨胀系数，对于量热完全气体，$\alpha_{\mathrm{f}}=\rho(\partial v/\partial T)_{p,\lambda}=1/T$[19]。本文假设反应前后系统的等压比热保持不变，即，$c_{p\mathrm{A}}=c_{p\mathrm{B}}$，于是式(12)进一步简化为：

$$\sigma = \frac{q}{c_{p\mathrm{A}}T} - \frac{\delta}{1-\delta\lambda} \tag{13}$$

式（11）中，热性 Σ 表征了化学反应系统通过体积膨胀，以对外做功的方式向环境传递化学能的传递速率。对于反应前后摩尔数不发生变化的单步反应的理想爆轰，式（13）中右端第二项可忽略，此时，Σ代表化学反应放热膨胀导致的对外做功的速率，这和反应放热速率的概念是一样的。但对于本文的研究，由于反应过程中摩尔数的减小导致了反应体系的体积变小（式 13 右端第二项），而该变化所引起的做负功的效应将抵消部分反应放热对外做正功的能力，因此，热性Σ表达了化学反应以膨胀形式对外做功的总速率，这个膨胀形式不仅包含了燃烧放热效应而且还包含了反应摩尔数变化带来的效应。进一步观察式（13）可以发现，随着反应的进行（λ逐渐增加），等式右端第二项（$\delta/(1-\delta\lambda)$）为逐渐增长的正值，当该项大于式中右端第一项时，此时 σ 为负数，Σ 也为负数，在这种条件下，反应摩尔数变化导致的做功占主导，爆轰波表现为病态爆轰。

对于理想爆轰的 ZND 模型，通常可以采用式（2）的稳态形式的控制方程求解，此时可以看作求解常微分方程组的初值问题，初始条件可由 CJ 条件确定。但对本文的病态爆轰问题，由于其偏离 CJ 状态，故爆轰波传播马赫数 M_0 事先是未知的，其初始条件不能确定，此时采用稳态控制方程求解将出现困难。为此，可以采用确定正则条件的方法求解式（10），以得到 ZND 结构的解。正则条件要求：当 $\eta\to0$ 时，$\Sigma\to0$，否则上述方程式（10）将出现奇点。因此，可以选择任一 M_0 下的波后参数作为初始条件对方程（10）进行积分，当满足正则条件时积分结束，得到病态爆轰下的 ZND 结构；否则，重新调整 M_0 以得到新的初始参数继续计算直至满足正则条件。

1.3 数值验证

在开展一维爆轰波传播的数值模拟之前，还要对计算网格进行无关性验证。验证用的计算模型采用单步不可逆反应，令反应前后摩尔数不变（δ=0），则由式（9）可知比热比Γ为常数，这里令 Γ=1.2。其他参数中，设置 $q=50RT_0$，$E_{\mathrm{a}}=20RT_0$，爆轰波过驱度 f=1.0，f 定义为 $f=(D/D_{\mathrm{CJ}})^2$，其中，D 代表爆轰波的实际传播速度，D_{CJ} 代表理想 CJ 条件下的爆轰波传播速度。本节采用了 16pts/$\Delta_{1/2}$、32pts/$\Delta_{1/2}$ 和 64pts/$\Delta_{1/2}$ 时三种网格分辨率计算了上述参数条件下的爆轰波传播过程，这里 pts/$\Delta_{1/2}$ 表示爆轰波半反应区长度内的网格数量。在上述参数条件下爆轰波的传播过程是稳定的，其

录用稿件，非最终出版稿

无量纲化后的爆轰波峰值压力及其与 von Neumann 峰值压力理论值（p_N=42.06）的相对误差结果见表 1：

表 1 不同网格分辨率下求得的峰值压力及相对误差

Table 1 Peak pressure and relative error obtained at different grid resolutions

网格分辨率(pts/$\Delta_{1/2}$)	峰值压力 p_{max}	相对误差(%)
16	41.36	1.66
32	41.65	0.97
64	41.85	0.50

表中数据显示，当网格分辨率提高至 64pts/$\Delta_{1/2}$ 时，相对误差降至 0.5%，该误差水平明显较低，可以表明此时网格分辨率已满足计算精度要求。Ng 和 Zhang 的研究[22]也表明，当网格分辨率达到 20pts/$\Delta_{1/2}$ 以上时，一般的数值格式已经可以很好地捕捉爆轰波振荡压力的峰值。因此，我们在后续的计算均采用 64pts/$\Delta_{1/2}$ 的网格分辨率。

此外，本文还针对 Fickett 等人[6]的算例进行了验证，采用的单步不可逆反应（摩尔数不变）的参数为 q=50RT_0，Γ=1.2，f=1.6，E_a=50RT_0，该参数下计算得到的爆轰波峰值压力随时间表现为单一幅度的振荡模式，如图 1 所示。图中压力和时间分别用 p_0 和 $T_{1/2}$ 进行了无量纲化，其中 p_0 代表初始压力，$T_{1/2}$ 为半反应区时间，即流体质点在反应区内行进半反应区长度$\Delta_{1/2}$ 所花费的时间。图中结果表明：当峰值压力进入到稳定的振荡阶段时，本文计算得到的平均最大压力峰值为 p_{max}/p_0=97.7，与文献[22]计算结果（p_{max}/p_0=98.6）的相对误差仅为 0.9%；计算得到的平均振荡周期为 $t/T_{1/2}$=7.53，也落在文献[22]的 7.4~7.6 的范围内。由上述结果可知，本文采用的算法和网格精度都是合理可靠的。

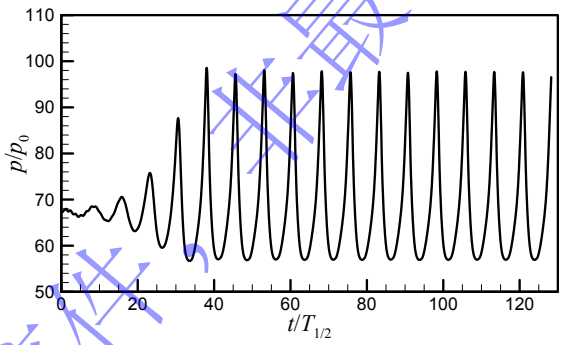


图 1 爆轰波峰值压力随时间的变化曲线（q=50RT_0, Γ=1.2, E_a=50RT_0, f=1.6）

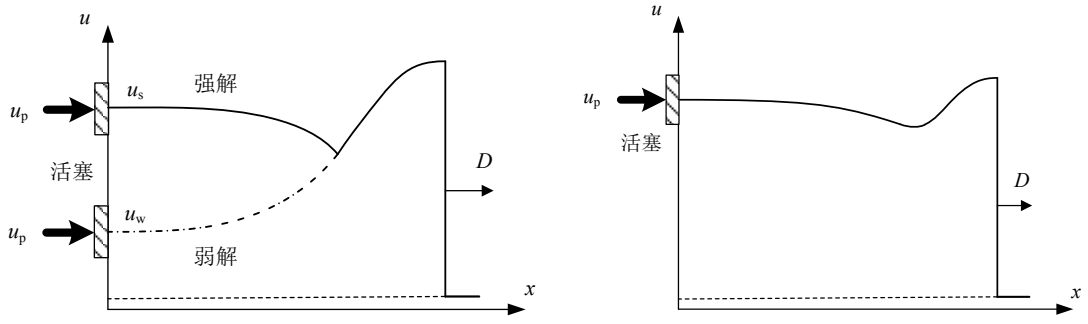
Fig.1 Time history of peak pressure of detonation wave (q=50RT_0, Γ=1.2, E_a=50RT_0, f=1.6)

2 计算结果与讨论

2.1 爆轰参数对病态爆轰稳定性的影响

病态爆轰反应区结构不同于理想爆轰波的结构，在实验室坐标系中，可以通过控制反应区末端的流体质点运动速度改变反应区的结构，而改变流体质点的运动速度可以通过假想的驱动活塞来完成，其示意图见图 2，图中 u_p 代表活塞运动（驱动）速度，u_s 和 u_w 分别代表爆轰波强解和弱解状态下反应区末端质点运动速度。在图 2(a)中，当活塞的驱动速度 $u_p=u_w<u_s$ 时，反应区表现为弱解结构；当 $u_p=u_s$ 时，反应区为强解结构。在这两种情况下（$u_p\le u_s$），爆轰波的传播是自持的。图 2(b)中，当活塞速度进一步增加（$u_p>u_s$），此时，则爆轰波的传播是过驱的。本文首先通过改变 u_p，来考察其对一维爆轰波稳定性的影响。图 3 给出了不同 u_p 下一维爆轰波峰值压力随时间的变化，这里选取的固定不变的参数为：E_a=17RT_0，Q=50RT_0，δ=0.5。图中活塞驱动速度 u_p 和质点运动速度（如 u_s 和 u_w）均采用爆轰波波前声速进行了无量纲化，而用于对压力做无量纲化的特征量 p_N 为爆轰波的 von Neumann 峰值压力。

录用稿件，非最终出版稿

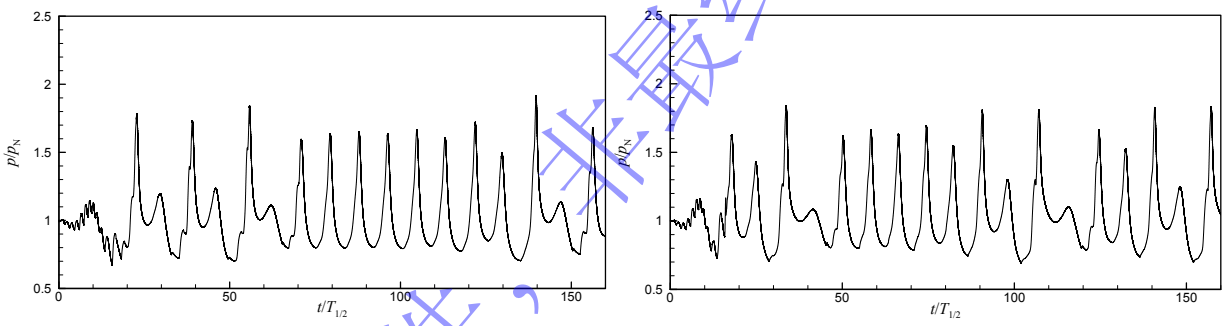


(a) Self-sustained detonation (b) Overdrive detonation

图 2 病态爆轰反应区结构示意图

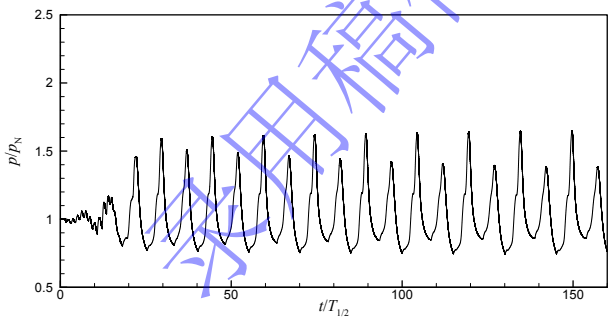
Fig.2 Schematic of reaction zone structure for pathological detonation

图 3(a)和 3(b)给出了活塞驱动速度 $u_p=u_w$ 和 u_s 时（u_w≈1.63 和 u_s≈2.02），压力峰值随时间的变化曲线。可以看出，当活塞驱动速度不超过 u_s 时，爆轰波峰值压力呈现多模态随机振荡的模式，当活塞驱动速度增加到 u_p=2.3 时（图 3(c)），峰值压力经过初始调整后逐渐变成两种压力振幅交替出现的双模态振荡模式。继续增大活塞驱动速度至 u_p=2.7（图 3(d)），压力峰值的振荡则变为单模态形式。随着 u_p 的进一步增加，爆轰波的峰值压力振荡逐渐减弱，并最终趋于稳定，如图 3(e)和 3(f)所示。上述结果表明，随着活塞驱动速度的增加，病态爆轰波的稳定性是逐渐增强的，这种变化规律和理想爆轰是一致的。

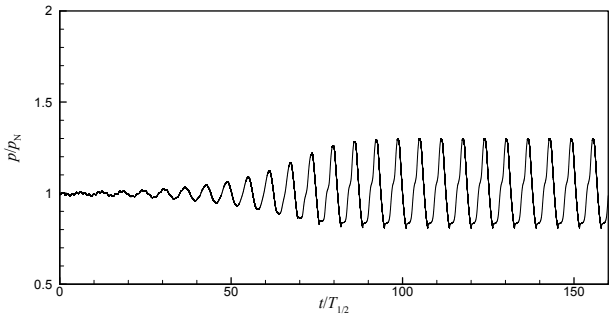


(a) $u_p=u_w$

(b) $u_p=u_s$

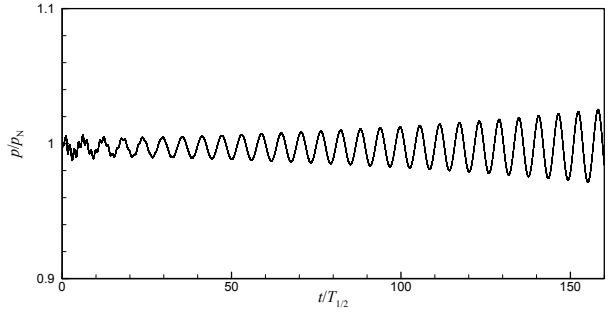


(c) u_p=2.3

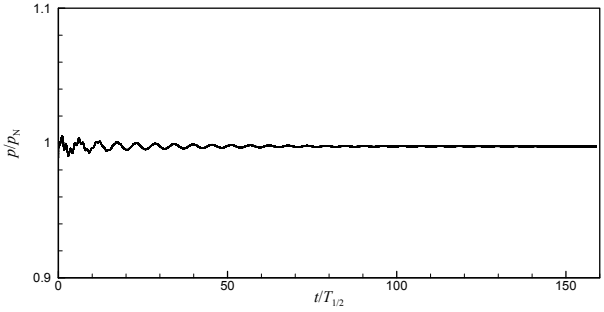


(d) u_p=2.7

录用稿件，非最终出版稿



(e) u_p=2.8



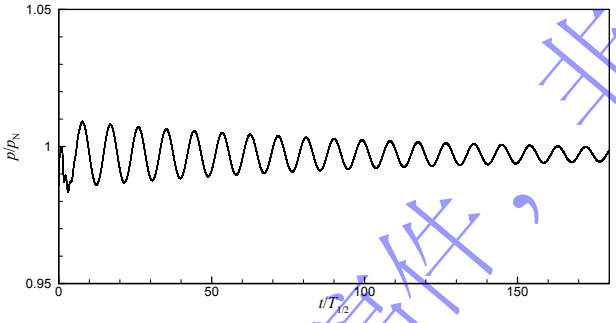
(f) u_p=2.9

图 3　不同活塞速度（u_p）驱动下的爆轰波压力峰值振荡曲线（E_a=17RT_0，q=50RT_0，δ=0.5）

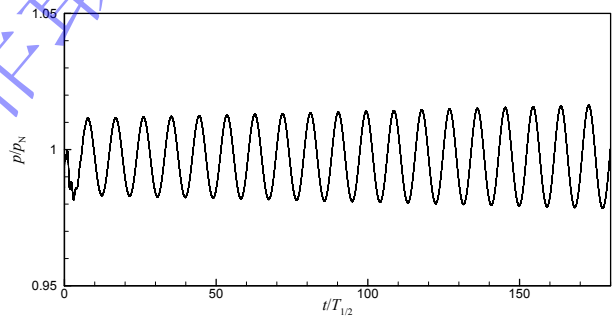
Fig.3　Pressure peak oscillation curves of detonation wave under different piston-driven speeds (u_p)

(E_a=17RT_0，q=50RT_0，δ=0.5)

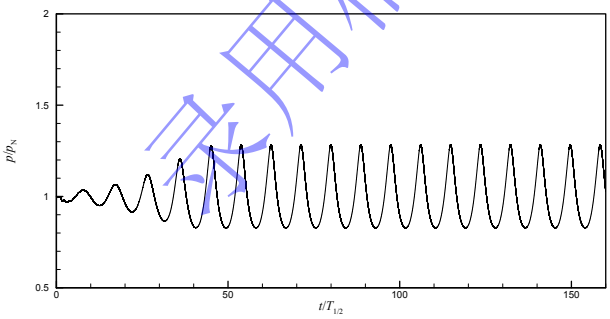
接下来分析当活塞驱动速度不变的条件下，活化能的大小对一维病态爆轰稳定性的影响。图 4 给出了活塞速度 u_p=u_w（自持爆轰，见图 2a）时，不同活化能条件下一维病态爆轰波峰值压力随时间变化的曲线。图中结果显示，随着活化能的增加，爆轰波逐渐由稳定传播变成不稳定传播。由图 4(a)和 4(b)可以发现，在本文参数条件下，病态爆轰波一维不稳定的临界活化能为 E_a=14.4RT_0，这个值要比相同热力学条件下（q=50RT_0）理想爆轰波一维不稳定的临界活化能（E_a=25.28RT_0）[19]要小，这说明在相同的条件下，病态爆轰波相较于理想爆轰波更容易失稳。随着活化能的进一步增加，峰值压力逐渐经历了单模态振荡（图 4c）、双模态振荡（图 4d）、多模态振荡（图 3a）到高度无规则振荡（图 4e）形态的转变。



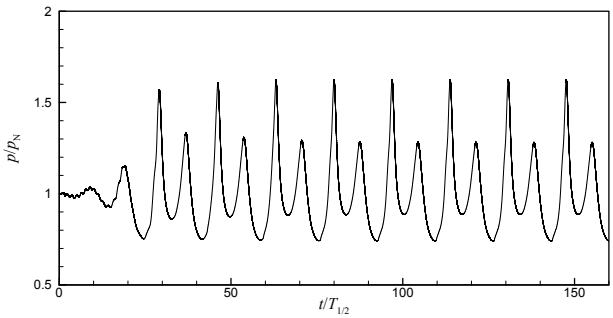
(a) E_a=14.3RT_0



(b) E_a=14.4RT_0

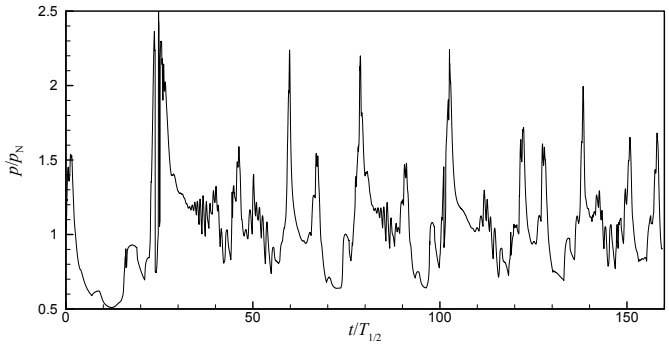


(c) E_a=15.0RT_0



(d) E_a=16.0RT_0

录用稿件，非最终出版稿



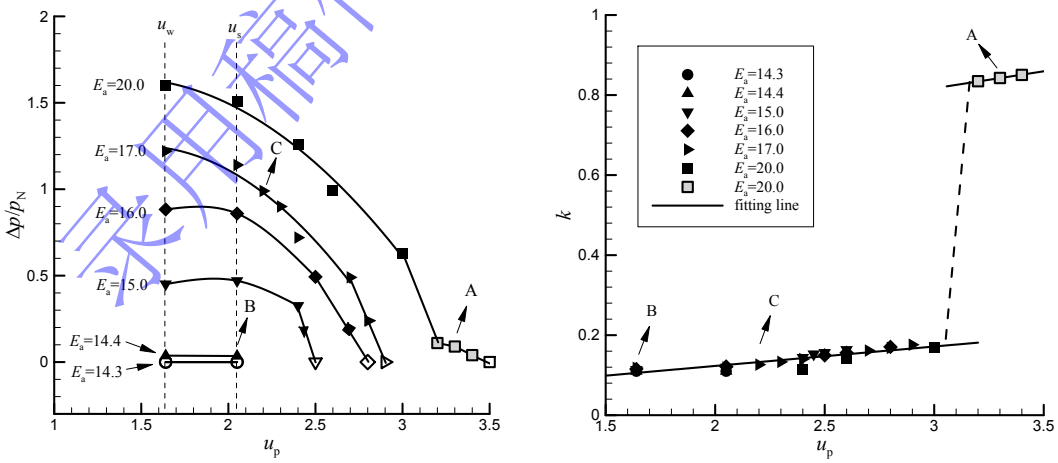
(e) E_a=20.0RT_0

图 4　不同活化能下的爆轰波峰值压力振荡曲线（u_p=u_w，q=50RT_0，δ=0.5）

Fig.4　Peak pressure oscillation curves of detonation wave under different activation energies (u_p=u_w，q=50RT_0，δ=0.5)

采用上述的数值模拟手段，本文针对活塞驱动速度 u_p=u_w~3.0 的范围和活化能 E_a=14.3RT_0~20RT_0 的范围开展了爆轰波一维非线性稳定性的研究，图 5 给出了不同 u_p 和 E_a 范围内爆轰波峰值压力振荡的振幅和振动主频的变化规律。图中定义振幅$\Delta p/p_N$ 为 t>50$T_{1/2}$ 之后无量纲峰值压力的最大值和最小值之间的差值，而振动主频 k 则是采用快速傅里叶变换（FFT）的方法对压力振荡曲线所提取的基频频率值。

图 5(a)的结果表明，当活塞驱动速度 u_p 不变时，一维不稳定爆轰波的振幅随着活化能 E_a 的增加而增加，说明高活化能下更易激发爆轰波的不稳定性。然而，随着活塞驱动速度的增加，上述峰值压力振幅的增加有减小的趋势，说明活塞驱动速度的增加有利于爆轰波的稳定。图 5(b)的峰值压力振荡主频率的变化则显示了与振幅不同的变化规律。图中结果表明，当活塞驱动速度 u_p<3.1 时，峰值压力的振荡频率 k 均保持较低水平并随 u_p 的增加呈现缓慢的线性上升趋势，峰值压力振荡频率的变化并不依赖于活化能。Leung 等人[23]对理想爆轰波一维稳定性的研究表明，这种低频振荡行为是单步反应条件下爆轰波传播的主要特点。当 u_p>3.1 时，较高活化能条件下的爆轰波振荡主频出现向高频率的跃迁现象。已有研究中，这种低频向高频跃迁的行为主要出现在两步反应[23]或基元反应[24]条件下的一维振荡爆轰波中。本文的研究则表明，在活塞驱动速度足够大的条件下，单步化学反应条件下的病态爆轰波也存在低频振荡向高频振荡的转换过程。



(a) Variation of amplitude　　(b) Variation of dominant frequency

图 5　爆轰波峰值压力的振幅和主频率随活塞驱动速度和活化能的变化图

（黑体实心符号代表不稳定状态的算例，灰体实心符号代表的临界状态算例，空心符号代表稳定状态的算例）

Fig.5　Variations of detonation peak pressure amplitude and dominant frequency under different piston-driven speeds and activation energies (The black solid symbol represents unstable state, the gray solid symbol represents critical state, and the

录用稿件，非最终出版稿

open symbol represents stable state)

2.2 典型工况下的稳定性分析

为进一步理解爆轰波的一维非线性振荡与爆轰波结构之间的关系，本文选取了图 5 中 A、B、C 三个典型算例所代表的不同爆轰波振荡行为进行分析。其中算例 A（E_a=20.0RT_0，u_p=3.3）代表了爆轰波的高频低幅振荡模式，算例 B（E_a=14.4RT_0，u_p=u_s）代表了低频低幅振荡模式，而算例 C（E_a=17.0RT_0，u_p=2.2）则代表了低频高幅的振荡行为。

2.2.1 高频低幅振荡模式

图 5 中 A 点的高频低幅振荡模式对应的活塞驱动速度 u_p=3.3，其值大于 u_s（≈2.04），此状态下系统处于过驱爆轰状态，如图 2(b)所示。图 6 给出了该工况下爆轰波峰值压力随时间变化的波形图及其放大图，可以看出峰值压力呈现的是频率很高的单一振幅的振荡行为，其振荡频率为 k=0.8427。取 ZND 结构对应的初始时刻和图 6(b)中典型的波峰（peak）、波谷（valley）对应的时刻，可以对爆轰波结构进行分析。

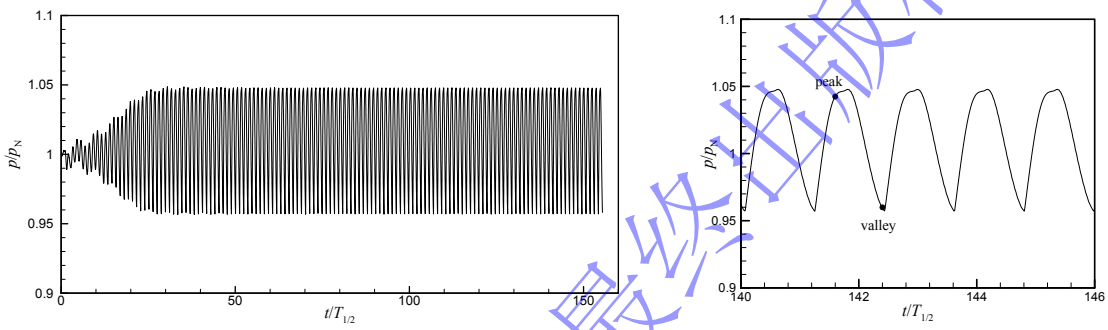
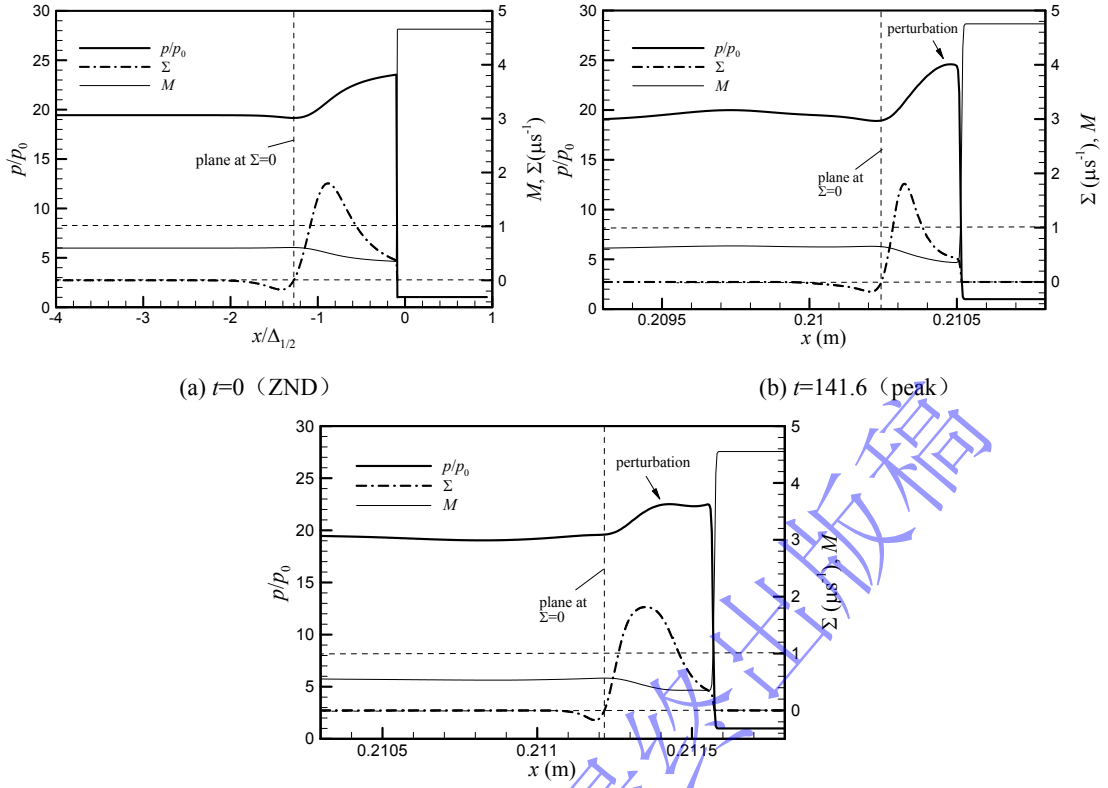


图 6 算例 A 的峰值压力振荡曲线（左）和及其放大图（右），右图中的记号表示波峰和波谷对应的时刻（E_a=20.0RT_0, u_p=3.3, δ=0.5）

Fig.6 Peak pressure oscillation curve of case A (left) and its locally enlarged curve (right), the black dots in the right plot indicate the moments corresponding to the wave peak and valley (E_a=20.0RT_0, u_p=3.3, δ=0.5)

图 7 分别给出了 t=0（对应初始 ZND 结构）、t=141.6（对应图 6 中的波峰）和 t=142.4（对应图 6 中的波谷）三个典型时刻下，爆轰波波后压力、马赫数 M（激波坐标系）和热性 Σ 沿反应区的变化规律，这里的压力是采用初始压力进行无量纲化后的结果（p/p_0）。首先从 t=0 的 ZND 结构（图 7a）可以看出，爆轰波波后热性（Σ）曲线先经历了一个正峰，这代表了爆轰波波后正常的反应放热做正功的现象，当Σ降低到 0 之后会继续降低进而出现一个负峰，这代表了典型的病态爆轰的对外做负功的现象，这种现象正是波后摩尔数减小使得系统体积减小而做负功的能力超过了系统放热做正功的能力所造成的。此外，波后压力存在极小值和波后流体亚声速流动（M<1）的行为也是过驱的病态爆轰的典型行为[19]。进一步分析波峰和波谷处的反应区结构（图 7b 和 7c）可以看出，尽管爆轰波的峰值压力经历了高频的振荡，但其在波峰和波谷时的反应区结构与 ZND 结构仍然是相似的，不同的是，在图 7(b)的波峰时的压力曲线中，来自反应区左端的扰动已经接近前导激波，而在图 7(c)的波谷时的压力曲线上，扰动仍距离前导激波有一定的距离。上述结果表明，对于过驱状态的病态爆轰波的高频振荡模式，反应区的结构没有明显变化，反应区仅有微小的扰动向爆轰波前导激波阵面方向传播。

录用稿件，非最终出版稿



(a) t=0（ZND）　　(b) t=141.6（peak）

(c) t=142.4（valley）

图 7　算例 A 在不同时刻的无量纲压力 p/p_0、马赫数 M 和热性 Σ 在反应区的变化规律（E_a=20.0RT_0，u_p=3.3, δ=0.5）

Fig.7　Variations of dimensionless pressure p/p_0, Mach number M, and thermicity Σ in the reaction zone at different moments for case A (E_a=20.0RT_0，u_p=3.3, δ=0.5)

2.2.2 低频低幅振荡模式

图 8 给出了工况 B 的爆轰波峰值压力振荡曲线及其放大图，此工况下活塞驱动速度为 u_p=u_s，其稳态爆轰波为自持爆轰（见图 2(a)）。可以看出，峰值压力随时间表现为低频和低幅的单一振荡形态，其振荡频率为 k=0.1104。为分析不同峰值压力下的反应区结构，图 9 给出了低频低幅振荡下初始 ZND 时刻和振荡曲线接近波峰（peak）和波谷（valley）时刻（见图 8(b)）下的反应区结构。

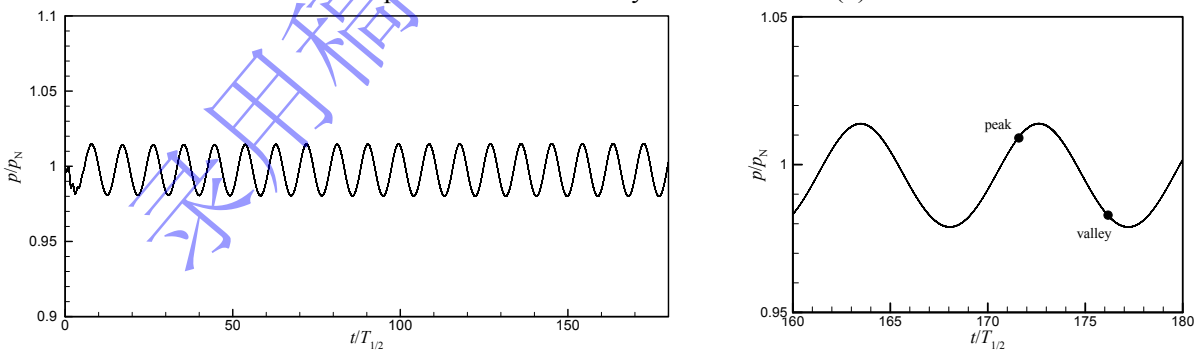


图 8　算例 B 的峰值压力振荡曲线（左）及其放大图（右）（E_a=14.4RT_0, u_p=u_s, δ=0.5）

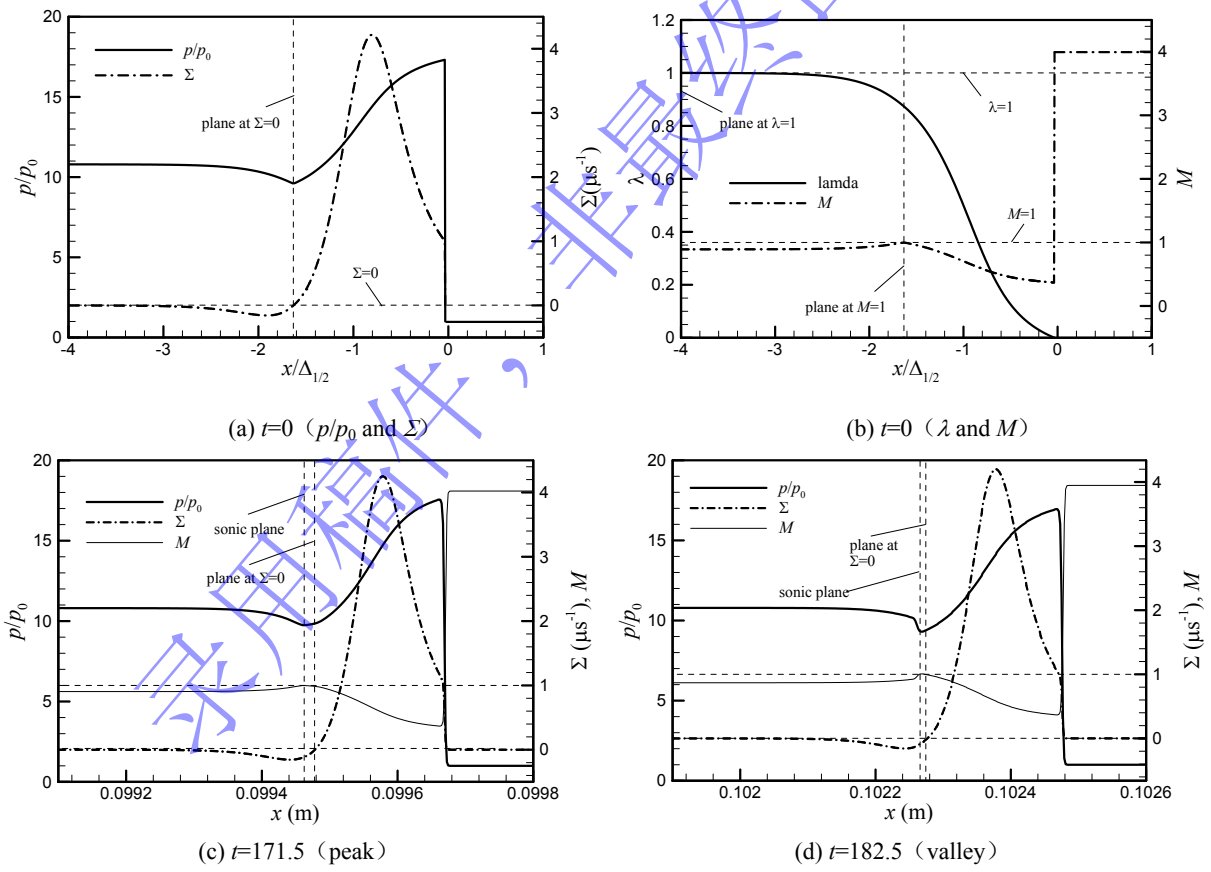
Fig.8　Peak pressure oscillation curve of case B (left) and its locally enlarged (right) (E_a=14.4RT_0，u_p=u_s, δ=0.5)

为进一步说明在 u_p=u_s 的稳态自持病态爆轰条件下，爆轰波的 ZND 结构，图 9(a)显示了压力 p/p_0 和热性 Σ 的曲线，可以看出压力和热性的分布与图 7(a)中的类似，即，压力在 $x/\Delta_{1/2}\approx-1.63$ 处存在极小值，且在该位置处Σ=0。图 9(b)则给出了 ZND 结构中流体运动马赫数 M（激波坐标系下）和反应进度λ的分布，可以发现，波后马赫数持续增加，到达 $x/\Delta_{1/2}\approx-1.63$ 处时达到 M=1，之后又下降

录用稿件，非最终出版稿

为亚声速；波后反应进度λ则持续增加，到 $x/\Delta_{1/2}$=–4 附近位置处趋于反应终止（λ=1）。由 M 和λ的曲线变化可以清晰地观察到波后反应区终止位置（$x/\Delta_{1/2}\approx$–4）落后于声速面位置。根据控制方程（10）可知，自持传播的爆轰波必须满足方程的非奇异性，因此只有当等式右端项的分子和分母同时为零（η=Σ=0）时才能满足非奇异性。根据η的定义，η=0 意味着 M=1，即流体运动达到声速；而Σ=0 则意味着热性系数σ=0，根据式（13）则有$\lambda=(q-\delta c_{pA}T)/(\delta q)\neq 0$，这说明自持病态爆轰波波后流体达到声速的位置化学反应仍在继续，因此反应终止面是落后于声速面的。比较图 9(a)和(b)还可以发现，Σ=0 的位置和 M=1 的位置是重合的，该位置点通常被称为广义 CJ 点。

对非稳态的不稳定过程，图 9(c)在接近波峰的时刻（t=171.5），反应区的各种曲线总体上与 ZND 结构中的类似，区别主要是前者的声速面（M=1）与 Σ=0 的位置没有重合，而且压力曲线最小值附近的曲线是光滑连续的，这些小的区别是由于非稳态计算所导致的。在 t=182.5 时刻（图 9(d)），峰值压力接近振荡曲线的压力谷值，此时反应区结构与和图 9(a)~9(c)的结果仍较为相似。但值得注意的是：在声速面附近，图 9(d)中压力和声速曲线有一个小的阶跃，说明该处存在一个小的激波，因而反应区呈现为双波解。Fickett 和 Davis[19]曾指出病态爆轰的强解存在两种形式，即“拐点解”和“双波解”，但并未明确指出两种解存在的条件，本文结果表明，当爆轰波在强解附近振荡时，在波峰附近显示为拐点解（图 9(c)），在波谷附近则显示为双波解（图 9(d)），爆轰波的低幅低频振荡是两种解交替出现的结果。



(a) t=0（p/p_0 and Σ）　(b) t=0（λ and M）

(c) t=171.5（peak）　(d) t=182.5（valley）

图 9　算例 B 在不同时刻的无量纲压力 p/p_0、马赫数 M 和热性 Σ 沿反应区的变化规律（E_a=14.4RT_0，u_p=u_s, δ=0.5）

Fig.9　Variations of dimensionless pressure p/p_0, Mach number M, and thermicity Σ in the reaction zone at different moments for case B (E_a=14.4RT_0，u_p=u_s, δ=0.5)

2.2.3 低频高幅振荡模式

图 10 给出了算例 C 的低频高幅振荡条件下的压力曲线及其局部放大结果，可以看出，此时峰值压力呈现出较不规则的双模态振荡形态，即峰值压力存在两个波峰和两个波谷的准周期振荡的行为

录用稿件，非最终出版稿

（见图 10 中右侧放大图），采用快速傅里叶变换（FFT）进行频谱分析发现了三个主要的振荡频率（k=0.0682、0.1264 和 0.2528），这也表明压力振荡曲线是由多个本征模态组成的。

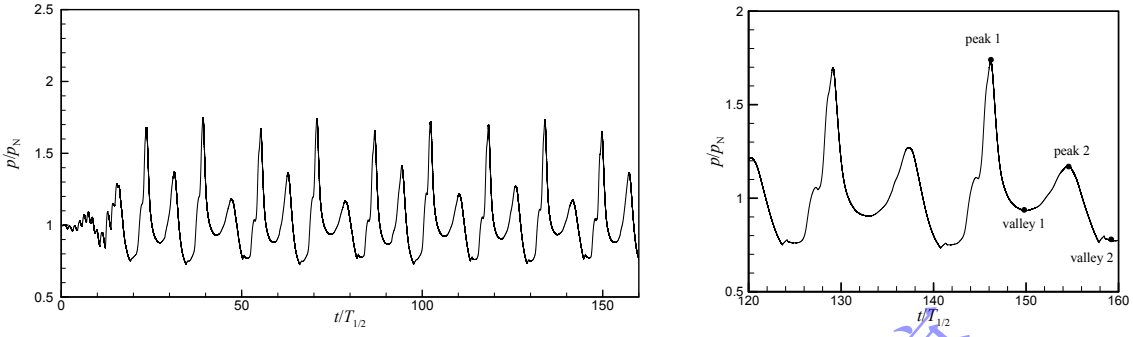


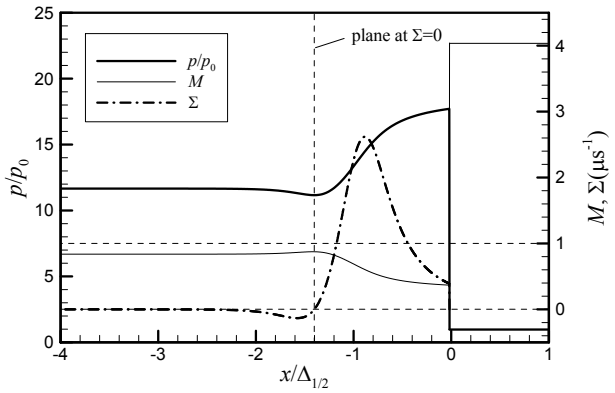
图 10　算例 C 的峰值压力峰振荡曲线（左）及其放大图（右）（E_a=17.0RT_0, u_p=2.2, δ=0.5）

Fig.10　Peak pressure oscillation curve of case C (left) and its locally enlarged plot (right) (E_a=17.0RT_0, u_p=2.2, δ=0.5)

图 11 同样给出了算例 C 在初始 ZND 时刻以及一个振荡周期内的两个波峰（peak 1 和 peak 2）和两个波谷（valley 1 和 valley 2）时刻下的反应区结构图。这些结果显示了反应区复杂多变的结构形态。图 12 给出了大波峰（peak 1）和小波谷（valley 1）两个时刻，将反应区结构分别映射在 p-v 图中所得到的结果，图中 v 代表比容。图 11(a)为典型的过驱状态下（u_p>u_s）的病态爆轰 ZND 结构，其结构特点与图 7(a)是类似的。然而，图 11(b)在大波峰（peak 1）时刻下爆轰波显示了与 ZND 不同的反应区结构。从图中可以看到，爆轰波前导激波压力达到了 30p_0，相比 ZND 结构的压力（约 17p_0）增加了近一倍；此外，波后压力持续下降，当越过Σ=0 的位置时继续下降并未形成最小值。另一方面，M=1 的曲线在波后持续上升，越过声速面后继续上升而变为超声速。上述变化符合一维爆轰波的弱解结构（参见图 2(a)）。图 12(a)进一步给出了该时刻下反应区在 p-v 图中的图像，图中用 R_N 表示的是爆轰前导激波状态下的 Rayleigh 直线，其斜率表征了穿过前导激波的流体流量，用 R_W 表示的是爆轰波在弱解条件下反应终了时的 Rayleigh 直线。Rayleigh 直线可写为

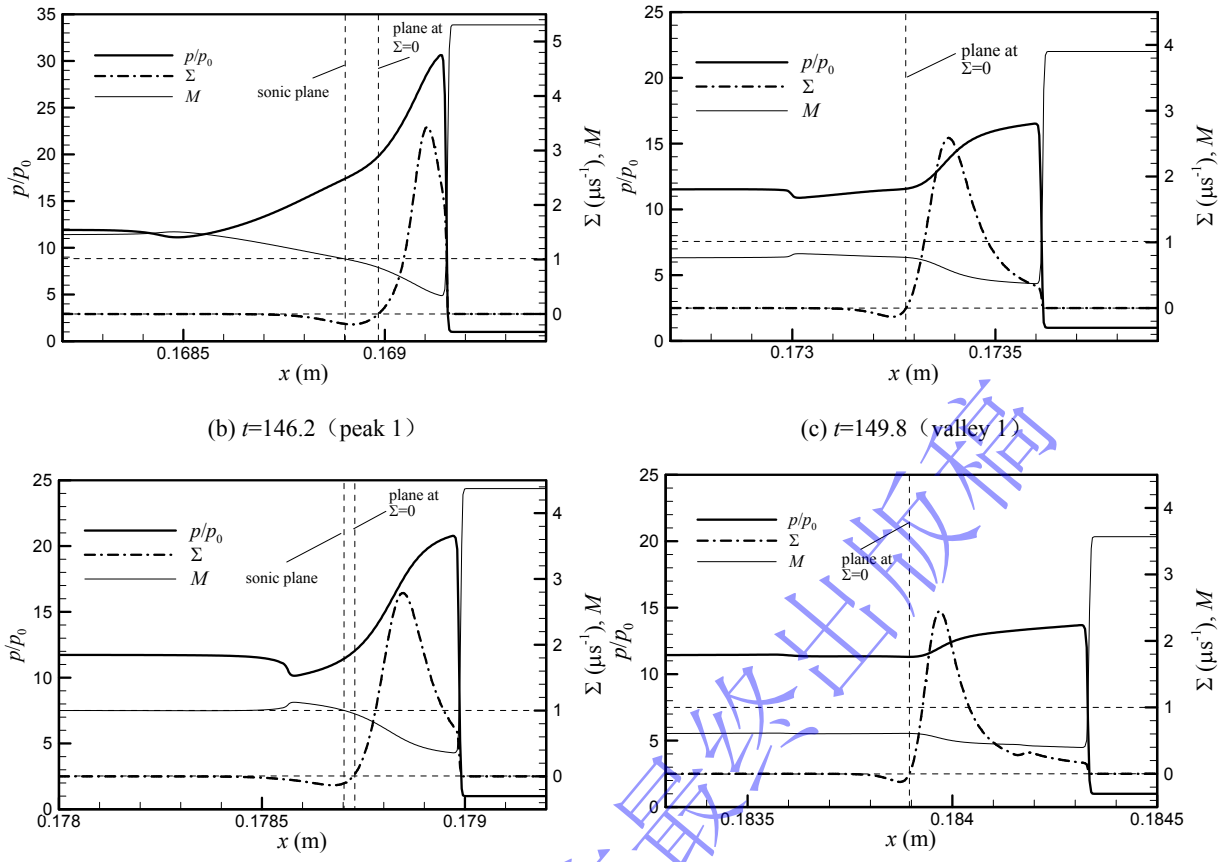
$$\frac{p}{p_0}-1=-\gamma_0 M_0^2\left(\frac{v}{v_0}-1\right) \tag{14}$$

式中，下标“0”代表波前状态，M_0 表示波前来流马赫数，γ_0 代表波前气体的比热比。上式中，斜率 $-\gamma_0 M_0^2=-(\rho_0 u_0)^2/(p_0 v_0)=-G^2/(p_0 v_0)$，其中 $G=\rho_0 u_0$ 代表流量，因此 Rayleigh 直线的斜率反映了反应区中气体的流量。由此可知，图 12(a)显示在 p-v 平面上，流体质点由初始状态（O 点）沿激波 Hugoniot 曲线达到前导激波的 von Nuemann 尖峰点（N 点）的状态，然后沿曲线轨迹从 N 点所在的 R_N 线逐渐过渡到弱解（W 点）所在的 R_w 线，其斜率逐渐变小，这说明在大波峰的条件下，流体沿反应区行进时其流量是逐渐减小的，因此，本文称该条件下的状态为“变流量弱解”状态。



(a) t=0（ZND）

录用稿件，非最终出版稿



(b) t=146.2（peak 1）　(c) t=149.8（valley 1）

(d) t=154.6（peak 2）　(e) t=159.2（valley 2）

图 11　算例 C 在不同时刻下无量纲压力 p/p_0、马赫数 M 和热性 Σ 沿反应区的变化规律（E_a=17.0RT_0，u_p=2.2，δ=0.5）

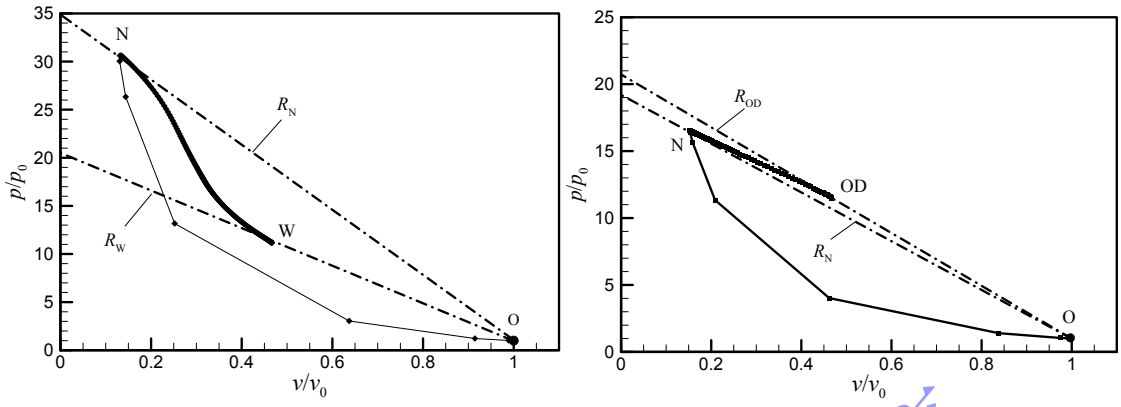
Fig.11　Variations of dimensionless pressure p/p_0, Mach number M, and thermicity Σ in the reaction zone at different moments for case C (E_a=17.0RT_0，u_p=2.2, δ=0.5)

图 11(c)给出了小波谷（valley 1）条件下的病态爆轰的反应区结构，可以发现，整个反应区的结构和 ZND 结构（图 11(a)）十分相似，表明爆轰波峰值压力在小波谷的条件是接近稳态条件（ZND）下过驱爆轰波。值得注意的是，在 x=0.173m 的位置处，压力和马赫数曲线存在一个小的阶跃，这实际上是爆轰从弱解向过驱解转变的过程中，期间经历的关于强解的双波解所遗留的小激波向波后下游传播所导致的。进一步观察图 12(b)的 p-v 相平面中反应区结构的变化，可以看到，该状态下流体质点从初态（O 点）跃迁到 von Neumann 尖峰压力点（N 点）后，再沿反应区由 R_N 表示的 Rayleigh 线向由 R_{OD} 表示的过驱爆轰的 Rayleigh 线过渡，在这一过程中流体沿反应区行进时的流量是逐渐增加的，因此，本文称小波谷条件下的流动状态为“变流量过驱解”状态。

图 11(d)和(e)分别给出了小波峰（peak 2）和大波谷（valley 2）条件下，爆轰波反应区结构的分布。其中小波峰条件下的反应区也表现为变流量弱解结构，只是和大波峰条件下的相比程度有所减弱；同样地，大波谷条件下的反应区则表现为变流量过驱解的结构，和小波谷条件下的相比其过驱程度要更强。这两种条件下的反应区结构在 p-v 相平面上的变化分别和图 12(a)、(b)的形态类似，这里不再给出。

u_p>u_s 条件下病态爆轰波低频高幅振荡的研究结果表明，在一个振荡周期内，病态爆轰波的反应区将从变流量弱解结构向变流量过驱解结构过渡，期间还会经历爆轰波的强解结构，在这个过程中，Σ曲线形成的正值峰会在爆轰波前导激波和Σ=0 的位置之间的区域完成一次来回的移动（见图 10）。整个爆轰波的振荡传播就是在上述结构的重复交替过程中进行的。

录用稿件，非最终出版稿



(a) t=146.2（peak 1）　　(b) t=149.8（valley 1）

图 12　算例 C 在不同时刻的 p-v 相图（E_a=17.0RT_0，u_p=2.2，δ=0.5）

Fig.12　The p-v phase diagram at different moments for case C (E_a=17.0RT_0，u_p=2.2，δ=0.5)

此外，还需要说明的是，算例 A 和算例 B 均属于低幅振荡模式，尽管它们也存在过驱解不同状态（算例 A）或强解的不同形式（算例 B）之间的变化，但由于振荡的幅度小，其 p-v 图中的反应区结构变化曲线与稳态条件下 p-v 图中 Rayleigh 直线的形态相差不大，因此本文不再给出。

3　结论

本文基于摩尔数减少的单步化学反应的 Euler 方程，采用高精度数值模拟的方法研究了病态爆轰波的一维纵向稳定性特性，考察了活塞驱动速度和反应活化能对稳定性的影响，分析了病态爆轰波传播过程中峰值压力的周期振荡行为与爆轰波非稳态条件下反应区结构的关系，得出的主要结论如下：

（1）与理想状态的 CJ 爆轰相比，在相同的放热（q/RT_0=50.0）条件下，反应摩尔数减小的病态爆轰更不稳定，其失稳临界活化能（E_a/RT_0=14.4）显著低于理想 CJ 爆轰的失稳临界活化能（E_a/RT_0=25.28）。

（2）活塞驱动速度的增加会导致爆轰波峰值压力的振荡由低频向高频过渡直至爆轰波趋于稳定，而活化能的增加则使得爆轰波峰值压力振荡由低幅向高幅转变直至出现不规则振荡。

（3）对高频低幅振荡特性的过驱病态爆轰，爆轰波反应区结构类似于定常的病态过驱爆轰波结构；对低频低幅振荡的具有强解构型的病态爆轰，爆轰波的反应区结构是在“拐点解”和“双波解”之间来回转换的非定常结构；而高幅低频振荡的过驱病态爆轰，爆轰波的反应区则表现为在“变流量弱解”、“强解”和“变流量过驱解”之间不断重复的非定常结构。

参考文献

[1]　Dionne J P, Ng H D, Lee J H. Transient development of friction-induced low-velocity detonations [J]. Proceedings of the Combustion Institute, 2000, 28(1): 645-651. DOI: 10.1016/S0082-0784(00)80265-9.

[2]　周朱林，刘卫东，刘世杰，等. 受侧向膨胀影响的爆震波传播过程研究[J]. 推进技术, 2013, 34(5): 713-720. DOI: 10.13675/j.cnki.tjjs.2013.05.018.
Zhou Z L, Liu W D, Liu S J, et al. Investigation on propagation process of detonation wave influenced by lateral expansion [J]. Journal of Propulsion Technology, 2013, 34(5): 713-720. DOI: 10.13675/j.cnki.tjjs.2013.05.018.

[3]　曹力文，王可，胡龙雨，等. 轴向侧向膨胀与通道曲率耦合影响下的旋转爆震波传播特性研究[J]. 航空动力学报, 2024, 40(04): 179-188. DOI: 10.13224/j.cnki.jasp.20240502.

录用稿件，非最终出版稿

Cao L W, Wang K, Hu L Y, et al. Experimental study on the propagation characteristics of rotating detonation waves in curved channels under the influence of axial lateral expansion [J]. Journal of Aerospace Power, 2024, 40(04): 179-188. DOI: 10.13224/j.cnki.jasp.20240502.

[4] Dionne J P, Duquette R, Yoshinaka A, et al. Pathological detonations in H_2-Cl_2 [J]. Combustion Science and Technology, 2000, 158(1): 5-14. DOI: 10.1080/00102200008947324

[5] Zhang F, Murray S B., Gerrard K B. Hybrid detonations in aluminum dust-gas mixtures [C]// Proceedings of the 19th International Colloquium on the Dynamics of Explosions and Reactive Systems. Kanagawa, Japan, 2003: 167-170.

[6] Fickett W, Wood W W. Flow calculations for pulsating one-dimensional detonations [J]. Physics of Fluids, 1966, 9(5): 903-916. DOI: 10.1063/1.1761791

[7] Sharpe G J, Falle S A E G. One-dimensional numerical simulations of idealized detonations [J]. Proceedings of the Royal Society of London. Series A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 1999, 455(1983): 1203-1214. DOI: 10.1098/rspa.1999.0355

[8] Sharpe G J, Falle S A E G. Numerical simulations of pulsating detonations: I. Nonlinear stability of steady detonations [J]. Combustion Theory and Modelling, 2000, 4(4): 557-574. DOI: 10.1088/1364-7830/4/4/310.

[9] Henrick A K, Aslam T D, Powers J M. Simulations of pulsating one-dimensional detonations with true fifth order accuracy [J]. Journal of Computational Physics, 2006, 213(1): 311-329. DOI: 10.1016/j.jcp.2005.08.013

[10] Ng H, Higgins A, Kiyanda C, et al. Nonlinear dynamics and chaos analysis of one-dimensional pulsating detonations [J]. Combustion Theory and Modelling, 2005, 9(2): 159-170. DOI: 10.1080/13647830500098357

[11] Yungster S, Radhakrishnan K. Pulsating one-dimensional detonations in hydrogen-air mixtures [J]. Combustion Theory and Modelling, 2004, 8(4): 745-770. DOI: 10.1088/1364-7830/8/4/005

[12] Yungster S, Radhakrishnan K. Structure and stability of one-dimensional detonation ethylene-air mixtures [J]. Shock Waves, 2005, 14(1): 61-72. DOI: 10.1007/s00193-005-0242-0

[13] Daimon Y, Matsuo A. Unsteady features on one-dimensional hydrogen-air detonations [J]. Physics of Fluids, 2007, 19(11): 116101. DOI:10.1063/1.2801478

[14] Radulescu M I, Ng H D, Lee J H, et al. The effect of argon dilution on the stability of acetylene/oxygen detonations [J]. Proceedings of the Combustion Institute, 2002, 29(2): 2825-2831. DOI: 10.1016/S1540-7489(02)80345-5

[15] Han W, Wang C, Law C K. Pulsation in one-dimensional H_2-O_2 detonation with detailed reaction mechanism [J]. Combustion and Flame, 2019, 200: 242-261. DOI: 10.1016/j.combustflame.2018.11.024

[16] Han W, Huang J, Wang C. Pulsating and cellular instabilities of hydrogen-oxygen detonations with ozone sensitization[J]. Physics of Fluids, 2021, 33(7): 076113. DOI: 10.1063/5.0055080

[17] Goldin A Y, Medvedeva T O, Kasimov A R. Mode locking in gaseous detonation propagation in a channel with periodically varying friction [J]. Physics of Fluids, 2022, 34(9): 096104. DOI: 10.1063/5.0103370

[18] Sharpe G J, Falle S A E G. One-dimensional nonlinear stability of pathological detonations [J]. Journal of Fluid Mechanics, 2000, 414: 339-366. DOI: 10.1017/s0022112000008697

[19] Fickett W, Davis W C. Detonation, Theory and Experiment [M]. New York: Dover Publications, Inc., 2000.

[20] Shi J, Zhang Y T, Shu C W. Resolution of high order WENO schemes for complicated flow structures [J]. Journal of Computational Physics, 2003, 186(2): 600-606. DOI: 10.1016/S0021-9991(03)00094-9

[21] 范宝春. 极度燃烧 [M]. 第一版 . 北京: 国防工业出版社, 2018: 134-135.

[22] Ng H D, Zhang F. Detonation Instability [A]. Zhang F. Shock Wave Science and Technology Reference Library. Vol. 6, Detonation Dynamics [M]. Germany, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2012: 107-212. DOI: 10.1007/978-3-642-22967-1_3

[23] Leung C, Radulescu M I, Sharpe G J. Characteristics analysis of the one-dimensional pulsating dynamics of chain-branching detonations [J]. Physics of Fluids, 2010, 22(12): 126101. DOI: 10.1063/1.3520188

录用稿件，非最终出版稿

[24] Daimon Y, Matsuo A. Detailed features of one-dimensional detonations [J]. Physics of Fluids, 2003, 15(1): 112-122. DOI: 10.1063/1.1526698

录用稿件，非最终出版稿